Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 1$^{\text{ère}}$ année, 2024-2025, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Feuille de TD n°7 :

Fonctions : dérivabilité.

Exercice 1 ⋄

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Démontrer chaque assertion correcte et donner un contre-exemple pour chaque assertion fausse.

1. Toute fonction continue en x_0 est dérivable en x_0.
2. Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0.
3. Toute fonction dérivable sur un intervalle I a une dérivée continue sur I.
4. Si deux fonctions ont leurs dérivées égales sur un intervalle ouvert, alors elles sont égales sur cet intervalle.
5. Si une fonction paire est dérivable, alors sa dérivée est impaire.
6. Toute fonction ayant sa dérivée paire est impaire.

Exercice 2 ⋄

Indiquer, dans chaque cas, sur quel ensemble la fonction $x \mapsto f(x)$ est dérivable et y calculer sa dérivée.

1. $f(x) = \sin(\cos x)$;
2. $f(x) = x^{2x}$;
3. $f(x) = \sqrt{1+x^2+2x^4}$;
4. $f(x) = \dfrac{x+\ln(x)}{x-\ln(x)}$;
5. $f(x) = x^2 \exp\left(-\dfrac{1}{2x^2}\right)$;
6. $f(x) = \tan(\sqrt{1-x^2})$;
7. $f(x) = \dfrac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)-1}{\exp\left(\frac{1}{x}\right)+1}$;
8. $f(x) = \ln(1+\sqrt{1+\cos x})$;
9. $f(x) = (1+x)^{x^2}$;
10. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right)$;
11. $f(x) = \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$;
12. $f(x) = \operatorname{argth}(\sin x)$.

Exercice 3 ⋄

Calculer la dérivée n-ième des fonctions $x \mapsto f(x)$ suivantes.

1. $f(x) = \sin(x)$;
2. $f(x) = x^k$ pour $k \in \mathbb{N}$;
3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$;
4. $f(x) = \ln(1-x)$;
5. $f(x) = \frac{1}{x}\exp(x)$;
6. $f(x) = x\exp(2x)$.

Exercice 4 ⋄

1. Déterminer si les applications $x \mapsto f(x)$ suivantes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

   a) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x \leqslant -1, \\ -4x & \text{si} \quad x > -1. \end{cases}$

   b) $f(x) = e^{|x|}$.

   c) $f(x) = x|x|$.

2. Déterminer les réels a et b pour que l'application suivante soit dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2-x+1 & \text{si} \quad x \geqslant 2, \\ (ax+b)^2 & \text{si} \quad x < 2. \end{cases}$$

Exercice 5 ⋄

Calculer les limites suivantes, en reconnaissant une dérivée ou en appliquant un développement limité à l'ordre 1.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$;
4. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\exp(x)-\exp(2)}{x^2+x-6}$;
5. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\sin(1+x)}{x^2-x-2}$;
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{th}(2x)}{\exp(x)-1}$;
7. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$;
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2x}{\arctan x}$;
9. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\pi-2x)\tan(x)$.

Exercice 6 $\diamond$
On considère l'application $f :]-\frac{1}{3},+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x+1}$.

1. Montrer que f est strictement décroissante.
2. Montrer que f réalise une bijection de $]-\frac{1}{3},+\infty[$ dans $]\frac{2}{3},+\infty[$. Déterminer sa réciproque, notée f^{-1}.
3. Calculer la dérivée de f^{-1} en utilisant la formule de la dérivée d'une fonction réciproque. Vérifier le résultat par le calcul direct de la dérivée de f^{-1}.

Exercice 7 $\diamond$
Prouver les encadrements suivants à l'aide du théorème des accroissements finis.

1. $\forall x > 0,\quad \frac{1-\exp(-x)}{x} < 1$;
2. $\forall x \in \mathbb{R},\quad |\sin(x)| \leqslant |x|$;
3. $\forall x \in \mathbb{R},\quad |\mathrm{sh}(x)| \geqslant |x|$;
4. $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}[,\quad x \leqslant \tan x$;
5. $\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\},\quad |\arcsin x| < \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}$;
6. $\forall x > 0,\quad \arctan x > \frac{x}{1+x^2}$.

Exercice 8

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a,b[$ s'annulant en $(n+1)$ points distincts. Montrer qu'il existe un point $x_0 \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$.
(Indication : procéder par récurrence.)
2. En déduire qu'il n'existe pas de polynôme P_n de degré $(n-1)$ dont la courbe représentative coupe plus de $(n+1)$ fois la courbe représentative de l'exponentielle.
(Indication : introduire $x \mapsto f(x) = e^x - P_n(x)$ et raisonner par l'absurde.)

Exercice 9 (Théorème de Darboux)
L'objectif de cet exercice est de démontrer le théorème suivant :

> "Si f est une fonction dérivable sur $[a,b]$, alors tout nombre y compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$ est atteint par f', c'est-à-dire peut s'écrire $f'(c)$ pour un certain $c \in [a,b]$."

1. Montrer que les fonctions $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ définies ci-dessous sont continues :
$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si} \quad x > a \\ f'(a) & \text{si} \quad x = a, \end{cases} \quad \text{et} \quad x \mapsto h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} & \text{si} \quad x < b \\ f'(b) & \text{si} \quad x = b \end{cases}.$$
2. Comparer $g(b)$ et $h(a)$. En déduire, par le théorème des valeurs intermédiaires, que si y est compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$, alors il existe $x \in [a,b]$ tel que $y = g(x)$ ou $y = h(x)$.
3. En déduire, par le théorème des accroissements finis, que l'on peut écrire $y = f'(c)$ pour un certain $c \in [a,b]$.
4. Cette propriété peut se résumer sous la forme

   "Une fonction dérivée f' vérifie la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires."

   Pour autant, une fonction dérivée n'est pas nécessairement continue : montrer, par exemple, que la fonction
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$
   est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que sa dérivée f' n'est pas continue en 0.
5. Déduire du théorème montré dans l'exercice que la fonction partie entière n'admet pas de primitive (c'est-à-dire qu'elle n'est la dérivée d'aucune fonction dérivable sur $\mathbb{R}$).