Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 1$^{\text{ère}}$ année, 2024-2025, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Feuille de TD n°6 :

Fonctions : limites et continuité.

Exercice 1 $\diamond$
Déterminer le domaine de définition naturel des fonctions définies par les formules suivantes.

1. $x \mapsto f(x) = \sqrt{\frac{1+2x}{4-3x}}$.
2. $x \mapsto g(x) = \sqrt{x^2+3x-4}$.
3. $x \mapsto h(x) = \ln(2x+5)$.
4. $x \mapsto k(x) = \ln(\ln(x))$.
5. $x \mapsto \ell(x) = \ln(-\ln(x))$.

Exercice 2 $\diamond$ (Manipulation de la définition de la limite)
Montrer les résultats suivants uniquement à l'aide des définitions de limites. On précisera au préalable le domaine de définition des fonctions impliquées.

1. La limite de la fonction $f : x \mapsto x^3$ en $x_0 = 2$ vaut 8.
2. La limite de la fonction $g : x \mapsto \ln(x)$ en $+\infty$ vaut $+\infty$.
3. La limite de la fonction $h : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ en 0^- vaut $-\infty$.

Exercice 3 $\diamond$ (Opérations sur les limites)
Soient f, g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Montrer les résultats suivants uniquement à l'aide des définitions des limites.

1. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell'$. Montrer que les fonctions $f+g$ et fg admettent une limite en x_0 que l'on exprimera en fonction de ℓ et ℓ'.
2. On suppose que f tend vers $+\infty$ en 1 et g tend vers $-\infty$ en 1. Montrer alors que fg tend vers $-\infty$ en 1.

Exercice 4 $\diamond$
Déterminer les limites suivantes, quand elles existent (ou prouver que la limite n'existe pas).

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^n-1}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2|x|}{x}$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x-4}$.
5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x}\sin(x)$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin(x)$.
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{1-\cos(x)}$. *Indication : on pourra utiliser la quantité conjuguée* $1+\cos(x)$.

Exercice 5 $\diamond$ (limites et inégalités)

1. Proposer un énoncé du théorème des gendarmes pour les fonctions en un $x_0 \in \mathbb{R}$ et le prouver à l'aide de la définition de la limite d'une fonction en x_0.
2. Proposer un énoncé du théorème des gendarmes pour les fonctions en $-\infty$. Application : déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\arctan(\ln(x^2))}{x}$.
3. Proposer un énoncé du résultat de passage à la limite en $+\infty$ dans une inégalité entre fonctions. Application : en admettant que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x^2)\ln(x) = +\infty$.

Exercice 6 $\diamond$
Étudier les limites suivantes en fonction des valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\lambda x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
2. $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{1}{x-\lambda} - \dfrac{1}{(x-2)^2}\right)$.
3. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+\lambda x+1}{x^2-1}$.

Exercice 7 $\diamond$

1. Pour $x>0$, réécrire $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ à l'aide de la quantité conjuguée, et en déduire que

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2. En réutilisant les calculs de la question précédente, réduire au même dénominateur la quantité $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$, et en déduire que

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 8 $\diamond$

Vrai ou faux ? Justifier par une preuve ou un contre-exemple.

1. Si $f(x) = \underset{x\to 0^+}{o}(x)$, alors $f(x) = \underset{x\to 0^+}{o}(\sqrt{x})$.
2. Si $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x)$, alors $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.
3. Si $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x)$ et $g(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, alors $f(x)+g(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.
4. Si $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x)$ et $g(x) = \underset{x\to +\infty}{o}(x)$, alors $f(x)+g(x) = \underset{x\to 0}{o}(x)$.
5. Si $f(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
6. Si $f(x) = x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x)$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$.
7. Si $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} g(x)$, alors f et g ont une limite en 0 et les deux limites sont les mêmes.
8. Si $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} g(x)$ et f a une limite (finie ou infinie) en 0, alors g a une limite en 0, égale à celle de f.

Exercice 9 $\diamond$

Pour chacune des fonctions suivantes, décrire le domaine D de définition naturel, puis détailler les opérations algébriques et les compositions en jeu pour justifier la continuité de la fonction sur D.

1. $x \mapsto f(x) = \sqrt{x^3-2}$,
2. $x \mapsto g(x) = \ln\left((x-1)^2(x+2)^4\right)$,
3. $x \mapsto h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-3}$.

Exercice 10 $\diamond$

1. Montrer que pour tout $x>0$, la fonction définie par $y \mapsto f(y) = y^3+2xy-x$ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x>0$, il existe un unique $y\in\mathbb{R}$ vérifiant

(1) $$y^3+2xy-x=0.$$

On définit dans la suite la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x>0$, $\varphi(x)$ est l'unique solution de (1).

3. Montrer que, pour tout $x>0$, $\varphi(x)\in[0,1]$ et déduire de l'équation (1) que, pour tout $x>0$

$$|x(2\varphi(x)-1)| \leqslant 1.$$

4. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = \dfrac{1}{2}$ puis, grâce à l'équation (1), que

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 11 $\diamond$

Montrer que les équations suivantes ont au moins une solution dans l'intervalle I.

1. $x^7-x^2+1=0$ avec $I=[-2,\ 0]$.
2. $e^x-3\sqrt{x}=0$ avec $I=[0,1]$.
3. $\sqrt[3]{x^3+6x+1}-3x=2$ avec $I=\mathbb{R}$.
4. $x+\sin(x) = \frac{1}{x^2+4}$ avec $I=[0,\pi]$.
5. $\tan x = \frac{3}{2}x$ avec $I =]\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}[$.

Exercice 12 $\diamond$

Vrai ou faux ? Donner à chaque fois une preuve ou un contre-exemple.

1. Si $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ est continue, positive et $f(a)=0$, alors il existe $c\in[a,b]$ tel que f soit croissante sur $[a,c]$.

2. Une fonction continue et injective sur un intervalle est strictement monotone.
3. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et bornée, alors $f(\mathbb{R})$ est un intervalle.
4. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée.
5. Si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée.

Exercice 13
Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x)| = |g(x)| \neq 0.$$

Montrer que $f = g$ ou $f = -g$. Est-ce encore vrai si l'on enlève l'hypothèse "différent de 0" ?

Exercice 14 $\diamond$
Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une application continue.

1. En étudiant l'application g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - x$, montrer que f admet au moins un point fixe (i.e. il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$).
2. On suppose de plus que $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour tout $x \neq y$ dans $[a, b]$ (on dit que f est *contractante*). Montrer que f admet un seul point fixe.

Exercice 15 $\diamond$
Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

1. $x \mapsto f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin(x)$. 2. $x \mapsto g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$. 3. $x \mapsto h(x) = x\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$.

Exercice 16
Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x > 0$, $f(x) = x^{1/x}$.

1. Étudier la continuité de f sur son domaine de définition.
2. La fonction f peut-elle être prolongée par continuité en 0 ?

Exercice 17
On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Soient les suites u et v telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2\pi(n+1)}$ et $v_n = \frac{1}{2\pi(n+1/4)}$. Que valent $f(u_n)$ et $f(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?
2. Que peut-on en déduire pour la limite de f en 0^+ ?

Exercice 18
Soit $x \in \mathbb{R}$ et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{E(nx)}{n}$, où E est la fonction partie entière.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x - \frac{1}{n} \leqslant x_n \leqslant x$.
2. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

On a donc montré que tout nombre réel est limite d'une suite de nombre rationnels.

Exercice 19 $\clubsuit$
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(0) \neq 0$ et

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x + y) = f(x)f(y). \tag{2}$$

Le but de cet exercice est de montrer que f est nécessairement de la forme $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ax}$, pour un certain $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété suivante : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(nt) = f(t)^n$.
2. En déduire que s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(\frac{x}{n}) = 0$. En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $f(0) = 1$, puis par l'absurde que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$. *Indication : on pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et aboutir à une contradiction avec la conclusion de la question 2..*

4. On pose $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \ln(f(x))$. Calculer, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $g(x+y)$ en fonction de $g(x)$ et $g(y)$, puis $g(nx)$ en fonction de $g(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Montrer que g est impaire.
6. On pose $a = g(1)$. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $g(\frac{1}{q}) = \frac{a}{q}$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $g(x) = ax$.
7. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels qui converge vers x (voir Exercice 18). Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$, et en déduire que $g(x) = ax$. Conclure.