Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 1$^{\text{ère}}$ année, 2024-2025, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Feuille de TD n°5 :

Suites réelles et complexes (troisième partie)

Exercice 1 ⋄

Les affirmations ci-dessous sont-elles vraies ou fausses ? Justifier dans chaque cas.

1. $\sqrt{n} = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$,
2. $n = \underset{n\to+\infty}{o}(\sqrt{n})$,
3. $n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sqrt{n^2+1}\right)$,
4. $1 = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$,
5. $(-1)^n = \underset{n\to+\infty}{o}(2)$,
6. $2^n = \underset{n\to+\infty}{o}(3^n)$,
7. $\sqrt{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$,
8. $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$,
9. $\ln(n^2+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln(n)$,
10. $n \underset{n\to+\infty}{\sim} n+1$,
11. $e^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n$,
12. $\ln(n+1) - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Exercice 2 ⋄ (Quelques opérations sur $\underset{n\to+\infty}{o}$ et $\underset{n\to+\infty}{\sim}$)

Soit u, v, w, t des suites réelles.

1. a) Montrer que si $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ et $w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(t_n)$, alors $u_n w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n t_n)$.

   b) On suppose que u et v ne s'annulent pas à partir d'un certain rang. Montrer que si $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$, alors $\frac{1}{v_n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{u_n}\right)$.

2. Prouver que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$. *On dit que la relation $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ est transitive.*

Exercice 3 ⋄

Pour chaque suite dont on donne ci-dessous le terme général, donner un équivalent le plus simple possible, puis conclure sur la limite éventuelle de la suite.

1. $a_n = \dfrac{e^{-n} + \sqrt{n^5} - n^2}{\ln(n) + n - \cos n}$,
2. $b_n = 2^n \ln(n) + \dfrac{3^n}{n+1} + \dfrac{4^n}{1+2^n}$,
3. $c_n = \dfrac{\ln(1+n^2)}{n+n^2}$,
4. $d_n = \dfrac{\ln(1+n^2)}{\ln(2+n^2)}$,
5. $e_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-1}$,
6. $f_n = \sqrt{1+\sqrt{n+1}} - \sqrt{1+\sqrt{n}}$,
7. $g_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$. *Indication : montrer d'abord que* $g_{n-1} = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$.

Exercice 4 ⋄ (Série harmonique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Étudier la convergence de $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Peut-on en déduire quoi que ce soit concernant la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$.
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

   Soit les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - \ln(n)$ et $w_n = v_n - \frac{1}{n}$.
5. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, et en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. *Indication : on pourra utiliser l'inégalité* $\ln(1+x) \leqslant x$, *valable pour tout* $x > -1$.
6. En déduire qu'il existe un réel γ (appelé constante d'Euler-Mascheroni, $\gamma \simeq 0,577215...$) tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1).$$

7. Donner un équivalent (le plus simple possible) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 5
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général

$$u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\sqrt{\dots\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la valeur de u_0 ?
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant n$.
4. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$.
5. Déterminer un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
6. Déterminer la limite de la suite $(u_n - \sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 6 ♣ (Méthode de Héron)
Soit $a > 1$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}-\sqrt{a}}{u_{n+1}+\sqrt{a}} = \left(\frac{u_n-\sqrt{a}}{u_n+\sqrt{a}}\right)^2$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \sqrt{a}$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. Déduire de ce qui précède que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$.
6. À l'aide du résultat de la question 2, montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} = \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{2^n}.$$

7. En déduire qu'il existe un réel $\lambda \in]0,1[$ tel que

$$u_n - \sqrt{a} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{a}\lambda^{2^n}.$$

Peut-on en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$ plutôt lentement ou plutôt rapidement ?

8. À l'aide d'une console `Python`, calculer u_4 lorsque $a = 2$, et commenter le résultat.