Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 1ère année, 2024-2025, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Feuille de TD n°4 :
Suites réelles et complexes (deuxième partie)

Exercice 1 ⋄
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et u, v deux suites réelles.

1. Montrer que si u et v sont minorés alors $u + v$ est aussi minorée.
2. Montrer que si $\lambda \leqslant 0$ et u est majorée alors λu est minorée.
3. Montrer que si u et v sont bornées alors uv est aussi bornée.
4. Montrer que si u et v sont croissantes à partir d'un certain rang, alors $u + v$ est également croissante à partir d'un certain rang.

Exercice 2 ⋄ (Opérations sur les suites convergentes)
Soit u et v deux suites réelles convergentes de limites respectives $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $u + v$ converge vers $\ell + \ell'$.
2. Montrer que la suite produit $uv = (u_n v_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente de limite $\ell\ell'$.
3. Supposons de plus $\ell' \neq 0$, alors montrer :
   a) v est non nulle à partir d'un certain rang,
   b) la suite inverse de terme général $\frac{1}{v_n}$ est bien définie à partir d'un certain rang et est convergente, de limite $\frac{1}{\ell'}$,
   c) la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ est bien définie à partir d'un certain rang et est convergente, de limite $\frac{\ell}{\ell'}$.
4. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite $(u_n^d)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ^d.

Exercice 3 ⋄
Soit u une suite réelle qui tend vers $+\infty$. Montrer que u n'est pas convergente (donc est une suite divergente).

Exercice 4 ⋄ (Opérations sur les suites divergentes)
Soit u et v deux suites réelles.

1. Montrer que si u converge vers $\ell > 0$ et v tend vers $+\infty$, alors le produit uv tend vers $+\infty$.
2. Montrer que si u tend vers $+\infty$ et v tend vers $-\infty$, alors uv tend vers $-\infty$.
3. Montrer que si u converge vers ℓ et si v tend vers $+\infty$, alors la suite des quotients $\frac{u}{v} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bien définie à partir d'un certain rang et est une suite convergente, de limite 0.
4. Soit u et v deux suites réelles. Montrer que si u est minorée et si v tend vers $+\infty$, alors $u + v$ tend vers $+\infty$. En particulier, montrer que si u est convergente et si v tend vers $+\infty$, alors $u + v$ tend vers $+\infty$.

Exercice 5 ⋄

1. On considère les suites de termes généraux suivants. Donner leur domaine de définition ainsi que leur limite.
   a) $u_n = \frac{2^n}{n^3}$, b) $u_n = \frac{(\ln(n))^2}{\sqrt{n}}$, c) $u_n = \frac{2^{\ln(n)}}{n^{\ln(3)}}$, d) $u_n = \frac{2^n}{n!}$.
2. On considère les suites de termes généraux suivants. Donner leur domaine de définition et dire si elles convergent. Si c'est la cas, donner leur limite.
   a) $u_n = n + \cos(n)$,
   b) $u_n = \frac{4n+\sin(n)}{n^3}$,
   c) $u_n = \frac{3n+5}{\sqrt{n^2+1}}$,
   d) $u_n = \frac{(n+1)(2+(-1)^n)}{n+3}$,
   e) $u_n = \frac{n-\ln(n)}{n+\ln(n)}$,
   f) $u_n = (-1)^n + \frac{2}{n}$,
   g) $u_n = \sqrt{n-2} - \frac{n}{2}$,
   h) $u_n = \frac{2^n}{n\ln(n)}$,
   i) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}$.

Exercice 6 $\diamond$

1. Que peut-on dire de la convergence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie $\lim nu_n = 0$?
2. Que peut-on dire de la convergence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie $\lim nu_n = 1$?
3. Que peut-on dire de la convergence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie $\lim nu_n = +\infty$?

Exercice 7 $\diamond$

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On considère une fonction $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ que l'on suppose continue et monotone, et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [a,b]$ et la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. On suppose que f est croissante. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Que dire de sa convergence ?
2. Étudier la convergence de la suite définie par

$$u_0 = -1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 4}{u_n + 5}.$$

3. On suppose que f est décroissante. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et convergentes.

Exercice 8 $\diamond$

Donner les limites des suites dont les termes généraux sont énumérés ci-dessous.

1. $a_n = n^4(1/3)^n$,
2. $b_n = \dfrac{3^n - 6^n}{n^5}$,
3. $c_n = \dfrac{6^n + n^2}{n!}$,
4. $d_n = \dfrac{2^n - n^2}{\sqrt{n}}$,
5. $e_n = \dfrac{3^n + \sqrt{n}}{4^n}$,
6. $u_n = (4n^3 + 2n + 5)e^{-2n}$,
7. $v_n = \dfrac{5^n}{n! + 3n}$,
8. $w_n = \dfrac{4n^2 5^n + 6n - 2}{-n^3 5^n + n - 6\sqrt{n} + 2}$,
9. $t_n = \dfrac{n^3 4^n - n^3 6^n + 1}{n^3 2^n + n^2 - 5}$.

Exercice 9 $\diamond$

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général $u_n = n^2 \Big(\ln(n) - n^{1/10}\Big)$.

1. À l'aide d'une calculatrice (ou d'une console `Python`), calculer numériquement une valeur approchée de u_n pour $n = 10$, $n = 10^2$, $n = 10^4$, et $n = 10^6$. Que constatez-vous ?
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.