Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 1ère année, 2024-2025, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Feuille de TD n°3 :
Suites réelles et complexes (première partie)

Exercice 1. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ci-dessous, toutes définies par récurrence, sont-elles arithmétiques, géométriques ? Le cas échéant, préciser leur raison. Dans tous les cas, calculer le terme général.

a) $\begin{cases} u_0 = 3, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\frac{\pi u_n}{\sqrt{17}}. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} u_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - u_n. \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2. \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}(3 - 2u_n). \end{cases}$

Exercice 2. Donner l'expression du terme général des suites réelles suivantes :

(1) $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique de raison 10 telle que $t_{1000} = 0$;
(2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique telle que $u_0 = -2$ et $u_{10} = 118$;
(3) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique telle que $v_0 = 3$ et $v_5 = -96$;
(4) $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison -2 telle que $w_5 = 320$.

Exercice 3. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les termes initiaux $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$ et les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

Soit la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes dont le terme général est $z_n = x_n + iy_n$.

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer z_{n+1} en fonction de z_n.
(2) En déduire les termes généraux de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que les limites de ces deux suites.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et la récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(1) Calculer u_1 et u_2.
(2) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n^2 - 4$ est géométrique.
(3) En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis celle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes suivantes :

$$a)\ \sum_{k=0}^{n} \frac{5}{2^k}, \qquad b)\ \sum_{k=0}^{n} 3^{2k+1}, \qquad c)\ \sum_{k=0}^{n} \frac{1+4^k}{3^k}, \qquad d)\ \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{2^k}.$$

Exercice 6. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies ci-dessous sont-elles majorées, minorées, croissantes, décroissantes, convergentes ?

(1) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-3)^n + 3^n$.
(2) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{n+1000}{n+2012}$.
(3) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2^n}{n!}$.
(4) $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^{n+1}}. \end{cases}$

Exercice 7. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_0 = 1, \\ x_{n+1} = \frac{3x_n + 2y_n}{5}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_0 = 2, \\ y_{n+1} = \frac{2x_n + 3y_n}{5}. \end{cases}$$

Soit de plus $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = y_n - x_n$.

(1) Démontrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, convergente, et déterminer sa limite.
(2) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
(3) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, que nous noterons ℓ.
(4) Calculer $x_n + y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 8. Parmi les énoncés suivants, prouver ceux qui sont vrais et donner un contre-exemple pour les autres.

(1) Toute suite non minorée tend vers $-\infty$.
(2) Toute suite bornée est convergente.
(3) Toute suite convergente est bornée.
(4) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell > 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive ou nulle à partir d'un certain rang.
(5) Toute suite croissante tend vers $+\infty$.
(6) Si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi.
(7) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite, alors $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite.
(8) Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ont pas de limite, alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.
(9) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
(10) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie que $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 9. Soit a un réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et la récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 + \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
(2) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite est nécessairement 1.
(3) On suppose $a \in [0,1]$. Montrer par récurrence que $u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
(4) On suppose $a > 1$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
(5) On suppose $a < 0$. Calculer u_1. Pour quelles valeurs de a la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Exercice 10. Parmi les énoncés suivants, prouver ceux qui sont vrais et donner un contre-exemple pour les autres.

(1) Si *(a)* $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, *(b)* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et *(c)* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
(2) Si *(a)* $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, *(b)* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et *(c)* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante alors (u_n) et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
(3) Si *(a)* $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, *(b)* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante, *(c)* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et *(d)* $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.
(4) Si *(a)* $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et *(b)* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 11. Dans chacun des cas qui suivant, montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -\frac{1}{n+1}$ et $v_n = \frac{1}{n+3}$.
(2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 12* (Lemme de Cesàro). Nous allons démontrer le résultat suivant, appeler Lemme de Cesàro

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle qui converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par
$v_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k$ converge aussi vers ℓ.

(1) Dans cette question, on suppose que $\ell = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement fixé.
  (a) Montrer qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq N$.
  (b) Montrer que pour tout $n > N$, $\left|\frac{1}{n}(u_{N+1} + u_{N+2} + \ldots + u_n)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
  (c) Montrer qu'il existe un entier $P \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > P$, $\left|\frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \ldots + u_N)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
  (d) En déduire que pour tout $n > \max(N,P)$, on a $|v_n| \leq \varepsilon$. En déduire que $\lim_{n\to\infty}(v_n) = 0$.
(2) Sans supposer que $\ell = 0$, montrer que $\lim_{n\to\infty}(v_n) = \ell$ (*Indice :* considérer la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}^*}$).
(3) Déduire du lemme de Cesaro que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \ell$.
(4) Application : calculer $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^n}{n!}\right)^{1/n}$.

Exercice 13. Soit $a > 2$. Le but de cet exercice est de donner un sens à l'écriture

$$\phi = a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{\cdots}}}.$$

Pour ce faire, on considère la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\phi_0 = a$ et la récurrence $\phi_{n+1} = a - \dfrac{1}{\phi_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(1) Écrire (sans les simplifier) les termes ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, puis expliquer en quoi cette suite est liée à l'écriture de ϕ.
(2) Montrer par récurrence que la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et vérifie $1 \leq \phi_n \leq a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(3) Calculer (en fonction de a) les racines du polynôme $P = X^2 - aX + 1$. On les note r_1 et r_2 avec $r_1 \leq r_2$.
(4) Montrer que $\phi_{n+1} - \phi_n = \frac{-1}{\phi_n}(\phi_n - r_1)(\phi_n - r_2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(5) Montrer par récurrence que $\phi_n \geq r_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (*Indice :* prouver que $a - r_2 = \frac{1}{r_2}$).
(6) En déduire que la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis qu'elle converge vers une limite que l'on précisera.
(7) Calculer $4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{\cdots}}}$.

Exercice 14. Soient a et b deux réels strictement positifs. On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et les récurrences

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \frac{2}{(u_n)^{-1} + (v_n)^{-1}}.$$

(1) Montrer par récurrence que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(2) Exprimer $u_{n+1} - v_{n+1}$ en fonction de u_n et v_n. En déduire que $v_n \leq u_n$ pour tout $n \geq 1$.
(3) Calculer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n et v_n. En déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
(4) Montrer de même que $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
(5) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, puis qu'elles ont la même limite (notée ℓ).
(6) Exprimer $u_{n+1}v_{n+1}$ en fonction de u_n et v_n pout tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression explicite de ℓ en fonction de a et b.
(7) En déduire que $\frac{2}{a^{-1} + b^{-1}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ (cette inégalité est dite "des 3 moyennes").