Université de Paris, Campus Saint-Germain-des-Près
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris

Licence 1re année, 2024-2025, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

# Feuille de TD n°2 :
# Polynômes

**Exercice 1.** Factoriser complètement (dans $\mathbb{C}$) chacun des polynômes ci-dessous :

(1) $P_1 = 2X^3 - X$,
(2) $P_2 = 2X^3 + X$,
(3) $P_3 = X^2 - 3iX + i - 3$,
(4) $P_4 = -3X^3 + 9X^2 + 2X - 6$ (calculer d'abord $P_4(3)$),
(5) $P_5 = X^3 - 2X + 1$ (trouver d'abord une “racine évidente”).

**Exercice 2.** L'ensemble des racines du polynôme $P = X^6 - 5X^5 + 8X^4 - 4X^3$ est $\{0, 1, 2\}$. En calculant les dérivées successives de $P$, déterminer la multiplicité de chacune, puis écrire $P$ sous forme factorisée.

**Exercice 3.** Si $a$ et $b$ vérifient $a + b = s$ et $ab = p$, quelles sont les racines du polynôme $X^2 - sX + p$ ? En déduire deux complexes $a$ et $b$ tels que $a + b = i$ et $ab = 1$.

**Exercice 4.** Soit $P$ un polynôme à coefficients réels.

(1) Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de $P$, alors $\bar{z}$ est aussi une racine de $P$.
(2) En déduire que $P$ peut s'écrire sous la forme

$$P = C \times \left[\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)\right] \times \left[\prod_{j=1}^{p}(X^2 + b_jX + c_j)\right],$$

pour un certain choix de $n, p \in \mathbb{N}$, et des réels $C$, $(a_i)_{1\le i\le n}$, $(b_j)_{1\le j\le p}$, $(c_j)_{1\le j\le p}$ tels que $b_j^2 < 4c_j$ pour tout $j \in \{1, 2, \dots, p\}$.

**Exercice 5.**

(1) Développer l'expression $(x + iy)^9$ pour $x$ et $y$ réels quelconques.
(2) On pose $P = 9X - 84X^3 + 126X^5 - 36X^7 + X^9$. Montrer que $P$ peut s'écrire sous la forme $P = X(X^2 - 3)Q$, où $Q$ est un polynôme que l'on explicitera.
(3) Déduire des deux questions précédentes que l'ensemble des racines du polynôme $X^6 - 33X^4 + 27X^2 - 3$ est $\left\{\tan\frac{k\pi}{9}\right\}_{k\in\{-4,-2,-1,1,2,4\}}$.

**Exercice 6*.** Soit $P$ un polynôme non nul à coefficients complexes. On suppose qu'il existe un polynôme $Q$ tel que $P = QP'$.

(1) Quel est le degré de $Q$ ?
(2) Soit $z$ une racine de $P$ de multiplicité $k$. À quelle condition (sur $k$) $z$ est-elle aussi une racine de $P'$ ? Quelle est alors sa multiplicité ? En déduire que $z$ est nécessairement une racine de $Q$.
(3) Montrer que $P$ est nécessairement de la forme $P = C(X - \alpha)^n$.

**Exercice 7*.** L'objectif de cet exercice est de trouver une racine réelle du polynôme $P = X^3 + 6X - 1$.

(1) On considère une racine réelle $x$ de $P$, et deux réels $u$ et $v$ tels que $x = u + v$ et $uv = -2$. Développer $P(u + v)$, puis en déduire que $u$ et $v$ sont solutions du système

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 1 \\ u^3v^3 = -8 \end{cases}.$$

(2) En déduire des valeurs convenables pour $u^3$ et $v^3$ (on pourra s'inspirer de l'exercice 3), puis l'expression explicite de $x$ à l'aide de la fonction “racine cubique” (notée $x \mapsto \sqrt[3]{x}$), bijection réciproque de la fonction $x \mapsto x^3$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
(3) Vérifier que la valeur de $x$ obtenue convient en calculant $P(x)$ à l'aide d'une calculatrice.