Université Paris Cité, Campus Saint-Germain-des-Près
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris

Licence 1re année, 2024-2025, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Feuille de TD n°1 : Nombres complexes

Exercice 1. Mettre sous forme algébrique $(a+ib)$ les nombres complexes suivants :

(1) $z_1 = (1+i)(2-i)(3+i)$ (2) $z_2 = \dfrac{-2}{1+3i}$ (3) $z_3 = \dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{1-i}{2-5i}$ (4) $z_4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{6} (2i)^k$

Exercice 2. Soit z un nombre complexe de module 1. Calculer $|1+z|^2 + |1-z|^2$.

Exercice 3. Soient a, b, c trois nombres complexes de module 1.

(1) Développer $\overline{abc}(ab+bc+ca)$

(2) En déduire que $|ab+bc+ca| = |a+b+c|$.

Exercice 4. Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, déterminer les ensembles E, F, G, H des points M d'affixe z définis par :

(1) $E = \{M(z),\ |(1-i)z+2i| = 9\}$

(2) $F = \{M(z),\ |((z+1)/(z-1+i\sqrt{3})| = 1\}$

(3) $G = \{M(z),\ |1+iz| = |1-iz|\}$

(4) $H = \{M(z),\ \mathrm{Re}((1+i)z) = 0\}$.

Donner pour chacun des ensembles une interprétation géométrique.

Exercice 5. Calculer les racines carrées de 1, i, $3+4i$, $8-6i$, et $7+24i$.

Exercice 6.

1) Donner le module et un argument des nombres complexes suivants :

$(a)\ 2+2i$ $(b)\ i^{95}$ $(c)\ \sqrt{3}+3i$ (d) $e^{e^{i\alpha}}$ (e) $e^{i\theta}+e^{2i\theta}$

2) Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

$(a)\ (1+i)^5$ $(b)\ \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$ $(c)\ (1-\sqrt{3}\,i)^4$

3) Calculer le module et l'argument principal de $u = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1-i$. En déduire le module et l'argument principal de $w = uv$ et de $z = u/v$.

Exercice 7. Soit $z = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

(1) Calculer $1+z+z^2+z^3+z^4$.

(2) On pose $w = z+\bar{z}$. Montrer que $w = z+z^{-1}$, puis déduire de la question précédente que $w+w^2 = 1$.

(3) En déduire l'expression exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

Exercice 8.

(1) Donner sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique les racines carrées de i.

(2) Donner sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique les racines carrées de $-i$.

(3) Donner sous forme trigonométrique les racines quatrièmes de i.

(4) Calculer sous forme algébrique les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

(5) En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$, puis les racines quatrièmes de i sous forme algébrique.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$(E_1)\ z^2-1+2i = 0$ $(E_2)\ (z^7-1)(z^3+1/27) = 0$ $(E_3)\ z^2+\sqrt{3}z-i = 0$ $(E_4)\ z^4+z^3-2z = 0$

Exercice 10. Soit $n \geqslant 1$. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z-2)^n = (z+2)^n$.

Exercice 11. Calculer les sommes suivantes :

(1) $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{32} \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^k$ (2) $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ (3) $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$

Exercice 12.

(1) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
(2) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ puis calculer $\cos(\pi/5)$ et $\cos(2\pi/5)$.
(3) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, linéariser $\cos^4(\theta)$ et $\sin^4(\theta)$ (c'est-à-dire les exprimer en fonction des $\cos(k\theta), \sin(k\theta)$).

Exercice 13. Parmi les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ ci-dessous, lesquelles sont injectives ? Justifier par une preuve ou un contre-exemple.

(1) $f_1 : z \mapsto z$
(2) $f_2 : z \mapsto \mathrm{Re}(z)$
(3) $f_3 : z \mapsto z^2$
(4) $f_4 : z \mapsto z^3$
(5) $f_5 : z \mapsto iz + 1$
(6) $f_6 : z \mapsto (1 + 3i)\,\mathrm{Re}(z) + 4\,\mathrm{Im}(z)$

Exercice 14.

(1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1)\ \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad (E_2)\ \sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad (E_3)\ \sqrt{3}\sin(x) - \cos(x) = 1\,.$$

(2) Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ les inéquations suivantes :

$$(I_1)\ \sin(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad (I_2)\ \cos^2(x) \geqslant \cos(2x) + \frac{3}{4}\,.$$

Exercice 15.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = 1$. Que vaut le module de z ?
(2) Combien de solutions complexes a l'équation $z^{11} = -1$? Combien de solutions réelles ?
(3) Représenter dans le plan complexe les ensembles suivants :

$$\mathbb{U}_3 = \{z \in \mathbb{C},\quad z^3 = 1\} \qquad \mathbb{U}_6 = \{z \in \mathbb{C},\quad z^6 = 1\} \qquad \mathbb{U}_8 = \{z \in \mathbb{C},\quad z^8 = 1\}$$

Exercice 16. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. On note M_1 (resp. M_2) le point d'affixe z_1 (resp. z_2).

(1) Quelles conditions géométriques doivent vérifier les points M_1 et M_2 pour que z_1/z_2 soit réel ?
(2) Quelles conditions géométriques doivent vérifier les points M_1 et M_2 pour que z_1/z_2 soit imaginaire pur ?

Exercice 17. En utilisant les formules d'Euler, démontrer les identités suivantes :

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Exercice 18*. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |a| < 1$. On considère l'application

$$f_a : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z - a}{1 - \bar{a}z}. \end{cases}$$

(1) Quel est le domaine de définition de f_a ?
(2) Montrer que si $|z| = 1$, alors $|f_a(z)| = 1$.
(3) Soit $w \in \mathbb{C}$. À quelle condition sur w peut-on trouver un $z \in \mathbb{C}$ tel que $f_a(z) = w$? Donner, lorsque la condition est vérifiée, l'expression de z obtenue. Que remarque-t-on ?
(4) En déduire l'image par f_a du cercle unité $U = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ et du domaine de définition de f_a.

Exercice 19*. Soit $j = e^{2i\pi/3}$.

(1) Montrer que $\bar{j} = j^2$.
(2) Soient $z_0 = 1 + i$, $z_1 = jz_0$, $z_2 = j^2 z_0$, et M_0, M_1, M_2 les points d'affixes respectives z_0, z_1, z_2. Montrer que $M_0M_1M_2$ est un triangle équilatéral.
(3) Soient A, B, et C trois points distincts du plan, d'affixes respectives a, b, c.
Montrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a} = -j$ ou $\dfrac{c-a}{b-a} = -\bar{j}$.
(4) En déduire que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $aj^2 + bj + c = 0$ ou $aj + bj^2 + c = 0$.