

Licence 1^{ère} année, 2025-2026, MATHÉMATIQUES ET CALCUL 1 (MC1)

Feuille de TD n°0

Logique, ensembles, fonctions.

Exercice 1

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}_-, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
5. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}^*, x + y > 0$.

Exercice 2 (Loi de De Morgan)

Soit E un ensemble. Soient A et B deux sous ensembles de E . Montrer, en raisonnant sur les définitions de l'intersection et union, que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. On peut montrer de même que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. *Ce sont les lois de De Morgan.*

Exercice 3

Représenter graphiquement les ensembles suivants.

1. $A_1 = \{(x, y) / x \geq 1, y \geq 0\}$.
5. $A_5 = \{-2\} \times \mathbb{R}$.
2. $A_2 = \mathbb{R} \times [-1, -\frac{1}{2}]$.
6. $A_6 = \{(x, y) / (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) / (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1\}$.
3. $A_3 = \{(x, x + 1) / x \in \mathbb{R}_+\} \cap \{(x, y) / y \leq 2, x \in \mathbb{R}\}$.
7. $A_7 = \{(x, y) / x \geq y, x^2 \leq y\}$.
4. $A_4 =]-2, -1[\times]0, 1[$.

Exercice 4

Soient A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes ainsi que leurs négations. Proposer un exemple pour chacune des quatre premières assertions.

1. A est non minorée.
4. Au moins un élément de A majore B .
2. A est stable par produit.
5. Si A est majoré, alors B est inclus dans A .
3. A est strictement inclus dans B .

Exercice 5

1. Soient $A \subset \mathbb{R}$ non vide et $B = \{a + 1 / a \in A\}$. Montrer que B est non vide.
2. Montrer que $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n, n + 1[$ et $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [0, \frac{1}{n}]$ sont non vides.

Exercice 6 (Partie Entière)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Rappeler la propriété caractérisant la partie entière de x (notée $E(x)$).
2. Représenter le graphe de la fonction partie entière.
3. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $E(x + k) = E(x) + k$.
4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. A-t-on en général $E(x + y) = E(x) + E(y)$.

Exercice 7

1. a) Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x < y \implies \exists z \in \mathbb{R}, x < z < y). \quad (1)$$

Indication : on pourra au préalable s'aider d'un dessin.

- b) Écrire la négation de (1).
2. (♣) Montrer que (1) reste valide en exigeant $z \in \mathbb{Q}$. On construira explicitement un exemple en utilisant la partie entière.

Exercice 8

Soit $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [\frac{1}{n}, 1]$. Montrer que $I =]0, 1]$.

Exercice 9

1. Rappeler la définition avec quantificateur d'un intervalle.
2. Interpréter qualitativement cette définition.
3. Soit $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que I est un intervalle. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Montrer alors que $[a, b] \subset I$.
4. Soit I, J deux intervalles. Montrer que $I \cap J$ est un intervalle.
5. Donner la négation de la définition d'un intervalle avec quantificateurs.
6. Donner un exemple de sous ensemble de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un intervalle et le démontrer.

Exercice 10

Soient A, B deux sous ensembles non vides de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si B est minoré, alors $A \cap B$ est également minoré.
2. Le résultat précédent est-il encore vrai si on considère $A \cup B$ à la place de $A \cap B$?

Exercice 11

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\max(\{x, y\}) = -\min(\{-x, -y\})$. *Indication : on pourra commencer par faire un dessin pour se convaincre que l'égalité est vraie.*

Exercice 12 (Valeur absolue et inégalité triangulaire)

On rappelle que la valeur absolue est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0, \end{cases} \quad \text{ou de manière équivalente, } |x| = \max(\{-x, x\}).$$

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $M \geq 0$. Montrer que $|x| \leq M$ si et seulement si $-M \leq x \leq M$.
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. En déduire l'inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Exercice 13

Soient a et b deux réels strictement positifs. Déterminer, s'ils existent, le plus grand élément et le plus petit élément des ensembles suivants.

1. $A = [-6, -2] \cup [-1, 3] \cup [5, 9]$.
2. $A =]-\infty, 0] \cup \{1\}$.
3. $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 3 \leq 0\}$.
4. $A = \{a + (-1)^n b / n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 14

Soit $A = \{\sqrt{2}, e, \pi\}$ et $B = \{0, 1\}$.

1. Rappeler les définitions d'injection et surjection et écrire leurs négations.
2. Construire une surjection définie sur A et dont l'ensemble d'arrivé est B .
3. Construire une injection définie sur B et dont l'ensemble d'arrivé est A .
4. Est-il possible de construire une surjection définie sur B vers A ? Une injection définie sur A vers B ?
5. Proposer un nouvel ensemble B de sorte à proposer une bijection définie sur A vers B .

Exercice 15

Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une fonction définie sur E à valeurs dans F . On suppose que f est bijective. On rappelle que le graphe de f est définie par

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) / x \in E\} \subset E \times F.$$

1. Soit $(x, y) \in E \times F$. Montrer que $(x, y) \in \mathcal{G}(f)$ si et seulement si $(y, x) \in \mathcal{G}_{f^{-1}}$.
2. Applications. *Exceptionnellement, il n'y a pas de démonstration attendue dans cette question.*
 - a) Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^2$. On admet que f est bijective. Quelle est la fonction réciproque de f ?
 - b) Interpréter la première question et en déduire le graphe de f^{-1} à partir de celui de f . *Indication : faire des dessins.*

Exercice 16 (♣)

Construire une bijection définie sur $\mathbb{N}$ et dont l'image est $\mathbb{Z}$. On vérifiera rigoureusement que c'est une bijection.