

Licence 1^{ère} année, 2025-2026, MATHÉMATIQUES ET CALCUL 1 (MC1)

DM n°2 :
Polynômes

RAPPEL DE COURS

DIVISION EUCLIDIENNE DANS LES ENTIERS NATURELS

À deux entiers $a \geq 0$ et $b > 0$, on associe de façon unique deux entiers naturels, le quotient q et le reste r , qui vérifient :

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad r < b.$$

Exercice 1

Effectuer les divisions euclidiennes suivantes, et donner pour chacune le quotient et le reste.

(1) Diviser 89 par 5.

(2) Diviser 125 par 7.

(3) Diviser 314 par 9.

Exercice 2

Soient $a, b, c, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.

1. Soit $P(X) = a(X - r_1)(X - r_2)$. Calculer $P(r_1)$ et $P(r_2)$ puis développer P .
2. Soit $Q(X) = aX^2 + bX + c$. Dédurre de la question précédente ce que vaut le produit des racines et la somme des racines de Q .
3. Soit $R(X) = X^2 + 91X - 92$. On admet que $R(92) = 0$. En déduire les racines de R .
4. Soit $T(X) = X^2 + 7X - 8$. Trouver une racine évidente de T . En déduire la deuxième racine.

Exercice 3

Factoriser les polynômes suivants en produit de polynômes de degré 1. *Indication : reconnaître les identités remarquables, chercher à défaut des racines évidentes et sinon les calculer à l'aide du discriminant.*

- | | | |
|--------------------|--------------------|----------------------|
| 1. $X^2 - 25$ | 4. $-X^2 + 2X - 1$ | 7. $2X^2 - 16X + 30$ |
| 2. $X^2 + 2X + 1$ | 5. $-X^2 + 6X - 9$ | 8. $-X^2 + 2X$ |
| 3. $X^2 - 8X + 16$ | 6. $X^2 + X - 6$ | 9. $X^3 - 6X^2 - 7X$ |

Exercice 4

Résoudre les inéquations suivantes (on précisera les conditions d'existence). Tracer les graphes des deux polynômes des questions a) et c).

- | | |
|--------------------------|--------------------------------------|
| a) $(x - 1)(x + 3) < 0$ | g) $\ln(x^2 + 1) > 2$ |
| b) $(x - 1)(x + 3) > 0$ | h) $\ln(x) > 2$ |
| c) $-(x + 2)(x - 7) > 0$ | i) $e^{-x^2} > 1$ |
| d) $ x - 1 > 3$ | j) $\frac{x+1}{2} - \frac{x}{3} > 4$ |
| e) $\sqrt{x} < 5$ | k) $\frac{x}{x-1} > 1$ |
| f) $x^{-2} < 1$ | |