Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 1ère année, 2025-2026, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

DM n°1 :

Puissances, Fractions

RAPPEL DE COURS

Règles de manipulation des fractions

— **Simplification** : si $k \neq 0$, $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$
— **Addition** : (on met au même dénominateur) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, $\quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} \quad (b, d \neq 0)$
— **Multiplication** : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
— **Division** : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad (b, c, d \neq 0)$
— **Inverse et puissance** -1 : $a^{-1} = \frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$, donc $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \quad (a, b \neq 0)$
— **Produit en croix** : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \quad (b, d \neq 0)$

Puissances et exponentielle

— **Règles sur les puissances (avec** $a > 0$**,** $n, m \in \mathbb{R}$**)** : $a^n \times a^m = a^{n+m}$, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $(a^n)^m = a^{nm}$, $(ab)^n = a^n b^n$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
— **Puissances fractionnaires** : $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
— **Exponentielle** e^x : définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, strictement positive, dérivable, et vérifie : $e^{x+y} = e^x e^y$, $e^0 = 1$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
— **Logarithme népérien** $\ln x$ **(défini pour** $x > 0$**)** : $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$, $\ln(x^n) = n \ln x$, $e^{\ln x} = x$, $\ln(e^x) = x$. De plus, $x^a = e^{a \ln(x)}$ (avec $a \in \mathbb{R}$).

Tous les exercices qui suivent sont à faire sans calculatrice !

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes (on précisera les conditions d'existence).

a) $\frac{2x+3}{5} = \frac{x-1}{2}$
b) $\frac{3x-4}{6} + \frac{5x+2}{4} = \frac{x}{3}$
c) $\frac{2}{x} = \frac{5}{x+1}$
d) $\frac{x+2}{x-1} = \frac{x-3}{x+4}$
e) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{3}{4}$
f) $x^{-2} = 7$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer et simplifier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ lorsque

1. $u_n = (3n)^5$
2. $u_n = (n-1)!$
3. $u_n = (2n)!$
4. $u_n = e^{2n+1}$
5. $u_n = 2^{-n}$
6. $u_n = n^n$

Exercice 3

Soient x, y et z des réels strictement positifs. Simplifier lorsque cela est possible les expressions suivantes :

a) $\left(\frac{x^2}{x^5}\right)^3$
b) $\left(\frac{2x^3}{y^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^4$
c) $\frac{x^4 y^{-3}}{x^{-2} y^5}$
d) $\left(\frac{x^{-1} y^2}{x^2 y^{-3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$
e) $\frac{x^2 x^{-1}}{x^2 + y}$

f) $(\sqrt{x})^{-4}$

g) $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{-6} \cdot \sqrt[3]{x}$

h) $\frac{x^{y+1} \cdot x^z}{x^{y+z}}$

i) $\frac{e^x e^y}{e^{x-y}}$

j) $\frac{e^{x^2}}{e^x}$

k) $\ln(e^{x^2})x^{-3}$

l) $\ln(x^2 y) - \ln(x)$