Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Master $1^{\text{ère}}$ année, MMA, 2023-2024
Optimisation sous contraintes

Rattrapage du 25/06/2024

Durée 1h30. Une feuille recto-verso de notes est autorisée.

Soit $p \geqslant 1$ un réel. Soit $q \in [1, +\infty]$ défini par la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (notez que $q = +\infty$ si $p = 1$). L'objectif de ce sujet est de redémontrer l'inégalité de Hölder

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad |\langle x,\, y\rangle| \leqslant \|x\|_p \, \|y\|_q \,, \tag{1}$$

grâce à des outils d'optimisation.

On rappelle que le signe d'un nombre réel $t \in \mathbb{R}$ est défini par

$$\operatorname{sign}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases},$$

et que $t = \operatorname{sign}(t)|t|$.

Exercice 1 (Cas $p = 1$) (5.5pt)

On souhaite donc ici démontrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad |\langle x,\, y\rangle| \leqslant \|x\|_1 \, \|y\|_\infty \,.$$

Soit $y \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et on considère le problème d'optimisation suivant

$$\inf_{x \in S} \langle x,\, y\rangle \,, \tag{$\mathcal{P}_1$}$$

où $S = \{x \in \mathbb{R}^n \;/\; \|x\|_1 \leqslant 1\}$. On notera f la fonction objectif du problème $(\mathcal{P}_1)$.

1. Montrer que le problème $(\mathcal{P}_1)$ est bien posée.
2. On suppose dans cette question uniquement que $n = 2$.
   a) Représenter sur trois figures différentes les ensembles S, $T_S(-e_1)$ et $T_S(-e_1)^*$.
   b) On suppose que $y = (-1, 1)$. Est-ce que $-e_1$ est solution de $(\mathcal{P}_1)$? Justifier en vous aidant en partie de vos figures.
3. Soit $k_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|y_{k_0}| = \|y\|_\infty$. On admet que $-\operatorname{sign}(y_{k_0})e_{k_0}$ est solution de $(\mathcal{P}_1)$.
   a) En déduire que pour tout $x \in S$, $\langle x,\, y\rangle \geqslant -\|y\|_\infty$.
   b) En déduire que pour tout $x \in S$, $-\|y\|_\infty \leqslant \langle x,\, y\rangle \leqslant \|y\|_\infty$. *Indication : on pourra considérer $-x$ à la place de x.*
   c) Finalement montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
   $$|\langle x,\, y\rangle| \leqslant \|x\|_1 \, \|y\|_\infty \,.$$

Exercice 2 (Cas $p, q \in]1, +\infty[$) (17pt)

On suppose dans cet exercice $p > 1$.

Partie I : questions préliminaires.

Soit $\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \kappa(t) = \begin{cases} |t|^p, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que κ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \kappa'(t) = \begin{cases} p\,\mathrm{sign}(t)|t|^{p-1}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

2. En déduire que κ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite, quand cela sera nécessaire, on écrira pour simplifier $|t|^r$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, au lieu de distinguer le cas $t = 0$ en supposant donc implicitement que $|t|^r = 0$ dans ce cas.

Partie II : différentiabilité de la p-norme.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que la p-norme d'un $x \in \mathbb{R}^n$ est définie par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

et que c'est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

3. Montrer que $g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i|^p$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla g(x) = (\kappa'(x_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Partie III : étude d'un problème d'optimisation.

On s'intéresse au problème d'optimisation suivant

$$(\mathcal{P}_2) \qquad \inf_{x \in S} \langle x,\, y \rangle\,,$$

où $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ est un vecteur fixé et $S = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, g(x) \leqslant 1\}$. On notera f la fonction objectif du problème $(\mathcal{P}_2)$.

5. Donner une interprétation géométrique de S à partir de la p-norme.

6. Montrer que $(\mathcal{P}_2)$ est bien posé.

7. Montrer que S est convexe.

8. A ce stade de l'étude, que pouvez-vous dire de l'unicité de la solution du problème $(\mathcal{P}_2)$?

9. a) Écrire S sous la forme standard (la plus simple possible) étudiée en classe.

   b) Montrer que tous les points de S sont réguliers par rapport aux contraintes le définissant.

10. Soit $x^\star$ un minimum global de f sur S.

    a) Justifier la bonne applicabilité des conditions KKT en $x^\star$ pour le problème $(\mathcal{P}_2)$ et montrer qu'il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que

$$\lambda(g(x^\star) - 1) = 0,$$
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad y_i = -\lambda \kappa'(x_i^\star).$$

    b) En déduire que $\lambda > 0$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathrm{sign}(x_i^\star) = -\mathrm{sign}(y_i)$. Que vaut alors $g(x^\star)$? Interpréter géométriquement.

    c) En calculant $\sum_{i=1}^n |y_i|^q$, montrer que $\lambda = \frac{1}{p}\|y\|_q$.

    d) Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, en déduire $|x_i^\star|$ puis $x_i^\star$ en fonction de y. Que dire de l'ensemble des solutions de $(\mathcal{P}_2)$?

    e) En s'inspirant de la fin du raisonnement de l'exercice 1, en déduire l'inégalité de Hölder (1).