Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
M1 MMA 2024-2025

Optimisation sous Contraintes - Interro n°3

Durée 35mn. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (5pt)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de codimension $p \in \mathbb{N}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et notons $A = x_0 + F$, le sous-espace affine de direction F contenant x_0. On note $(u_1, \dots, u_p)$ une base de $F^\perp$ et on pose pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, $h_j : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle u_j, x\rangle - \langle u_j, x_0\rangle$.

1. Montrer que $A = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \forall j \in \{1, \dots, p\}, h_j(x) = 0\}$.

2. Déterminer l'ensemble des points réguliers de A.

3. En déduire que pour tout $x \in A$, $T_A(x) = F$ puis que $T_A(x)^* = F^\perp$. *Indication : on utilisera le cône linéarisant à A en x.*

Correction.
5 = 1 + 1.5 + 2.5

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$x \in A \Leftrightarrow x - x_0 \in F \Leftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, p\}, \langle u_j, x - x_0\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, p\}, h_j(x) = 0. \text{ (1pt)}$$

2. (1.5pt) Soit $x \in A$. Le point x est régulier par rapport aux contraintes définissant A si et seulement si la famille $(\nabla h_1(x), \dots, \nabla h_p(x))$ est libre. Or pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, $\nabla h_j(x) = u_j$ et la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre puisque est une base de $F^\perp$. Donc x est bien régulier.

3. Soit $x \in A$. Alors d'après la précédente question x est régulier donc les contraintes sont qualifiées en x *i.e.* $T_A(x) = T_A^\ell(x)$ où $T_A^\ell(x) = \{h \in \mathbb{R}^n \,/\, \forall j \in \{1, \dots, p\}, \langle \nabla h_j(x), x\rangle = 0\} = \{h \in \mathbb{R}^n \,/\, \forall j \in \{1, \dots, p\}, \langle u_j, x\rangle = 0\} = F$ (1.5pt).

   De plus on sait que $T_A^\ell(x)^* = \{\sum_{j=1}^p \mu_j \nabla h_j(x) \,/\, \mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p) = F^\perp$, d'où on a bien $T_A(x)^* = F^\perp$ (1pt).

Exercice 2 (12.5pt)

On définit $C = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, f_1(x) \leqslant 0, h_1(x) = 0\}$ où

$$f_1 : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \frac{1}{2}\|x\|_2^2 - \frac{1}{2},$$
$$h_1 : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \langle e_3, x\rangle .$$

On admettra que C est un convexe non vide.

On pose également $f : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \langle \alpha, x\rangle$ où $\alpha \in \mathbb{R}^3$ et on s'intéresse au problème d'optimisation $\inf_C f$.

1. Montrer qu'il existe au moins un élément de C qui satisfait les conditions KKT pour les contraintes définissant C.

2. En déduire que f admet au moins un minimum global sur C.

3. On suppose que $\alpha \notin \mathrm{Vect}(e_3)$. Montrer grâce aux précédentes questions qu'alors f admet un unique minimum global sur C.

Correction.
12.5 = 7 + 2 + 3.5

1. Soit $x \in \mathbb{R}^3$. On a que x satisfait les conditions KKT pour les contraintes définissant C si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$x \in C, \tag{1}$$
$$\lambda \geqslant 0, \tag{2}$$
$$\lambda f_1(x) \geqslant 0, \tag{3}$$
$$\nabla f(x) + \lambda \nabla f_1(x) + \mu \nabla h_1(x) = 0. \tag{4}$$

Comme $\nabla f(x) = \alpha$, $\nabla f_1(x) = x$ et $\nabla h_1(x) = e_3$, l'équation (4) se réécrit : $\lambda x = -\alpha - \mu e_3$.

1pt pour l'écriture des conditions KKT,
0.5pt pour la simplification de l'éq (4).

Raisonnons par analyse / synthèse.

Analyse. Supposons que x satisfait bien ces conditions.

— Si $\lambda = 0$, alors nécessairement $\alpha = -\mu e_3$. Cela ne peut se produire que si $\alpha \in \mathrm{Vect}(e_3)$. Dans ce cas $\mu = -\alpha_3$. Remarquons qu'alors $f = 0$ sur C, donc l'ensemble des points de C sont des minimums globaux de f sur C.

— Sinon $\lambda > 0$ et alors $x = -\frac{1}{\lambda}(\alpha + \mu e_3)$. Comme $x \in C$ par (1), on a $\langle e_3, x \rangle = 0$ ($x_3 = 0$) donc $\mu = -\alpha_3$ et donc $x = -\frac{1}{\lambda}(\alpha_1, \alpha_2, 0)$. Puisque $\lambda > 0$, par (3), on a $f_1(x) = 0$ (car sinon $\lambda f_1(x) < 0$, puisque $f_1(x) < 0$), d'où $\left\| -\frac{1}{\lambda}(\alpha_1, \alpha_2, 0) \right\|_2 = 1$, soit $\lambda = \|(\alpha_1, \alpha_2, 0)\|_2$. Cela ne peut se produire que si $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$, car $\lambda > 0$, soit $\alpha \notin \mathrm{Vect}(e_3)$.

1pt pour l'étude du cas $\lambda = 0$,
2pt pour le cas $\lambda > 0$.

On remarque ainsi en reprenant différemment cette analyse que si x satisfait les conditions KKT et

— si $\alpha \in \mathrm{Vect}(e_3)$, alors on trouve nécessairement $\lambda = 0$, $\mu = -\alpha_3$ et il n'y a aucune contrainte sur x à part $x \in C$,

— si $\alpha \notin \mathrm{Vect}(e_3)$, alors on trouve nécessairement $\lambda = \|(\alpha_1, \alpha_2, 0)\|_2 > 0$, $\mu = -\alpha_3$ et $x = -\frac{1}{\lambda}(\alpha_1, \alpha_2, 0)$. Et au passage remarquons que $x \in \partial C$.

Synthèse. On vérifie bien rapidement que si $x \in \mathbb{R}^3$ satisfait l'assertion précédente définie par les deux conditions pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ comme décrit alors x satisfait bien les conditions KKT.

Ainsi on a prouvé que $x \in \mathbb{R}^3$ satisfait les conditions KKT si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

— si $\alpha \in \mathrm{Vect}(e_3)$, on pose $\lambda = 0$, $\mu = -\alpha_3$ et il n'y a aucune contrainte sur x à part $x \in C$,

— si $\alpha \notin \mathrm{Vect}(e_3)$, alors on pose $\lambda = \|(\alpha_1, \alpha_2, 0)\|_2 > 0$, $\mu = -\alpha_3$ et de plus $x = -\frac{1}{\lambda}(\alpha_1, \alpha_2, 0)$.

Cette seconde partie de l'équivalence est bien toujours vérifiée, donc on a bien montré qu'il existe toujours au moins un $x \in C$ qui satisfait les conditions KKT.

2pt pour réécriture finale des conditions KKT et 0.5pt conclusion.

2. D'après la précédente question, on sait qu'il existe $x^* \in C$ tel que x^* satisfait les conditions KKT. De plus f est convexe car linéaire et C est convexe, donc le problème $\inf_C f$ est convexe. On sait alors que nécessairement x^* est un minimum global de f sur C (2pt).

> Notez bien que nous n'avons pas eu besoin ici de conditions de qualifications de contraintes pour conclure. Si ce n'est pas clair, je vous renvoie aux deux théorèmes démontrés en fin de chapitre sur les conditions KKT.

3.
> La fonction f n'est pas strictement convexe, donc on ne peut déduire grâce à l'argument standard associé l'unicité de x^*. L'idée ici est d'exploiter le fait qu'il y a un unique élément de C qui satisfait les conditions KKT lorsque $\alpha \notin$ C. Cependant pour y arriver, on a besoin de l'implication x min global donne x satisfait condition KKT. Ce qui n'est vrai que si x est régulier. Contrairement à la question précédente où les conditions KKT implique d'être un minimiseur globale lorsque le problème est convexe, il faut ici une condition de qualification de contraintes ! C'est pourquoi nous commençons par étudier les points réguliers de C.

Soit $x \in C$. On a $\nabla f_1(x) = x$ et $\nabla h_1(x) = e_3$. Or $\langle e_3, x \rangle = 0$, car $x \in C$, donc $(\nabla f_1(x), \nabla h_1(x))$ est toujours une famille libre. Ainsi toute sous famille de $(\nabla f_1(x), \nabla h_1(x))$ est également libre (d'après la condition de régularité, on ne considère $\nabla f_1(x)$ dans la famille que si $f_1(x) = 0$ (contrainte active)). Donc x est régulier. Tous les points de C sont réguliers (1.5pt).

Par conséquent les contraintes sont qualifiées en tous les points de C. Soit $x \in C$ un minimum global de f sur C. Alors on déduit que x satisfait les conditions KKT. Comme $\alpha \notin \mathrm{Vect}(e_3)$, d'après l'étude de la première question on a nécessairement $x = -\frac{1}{(\|\alpha_1, \alpha_2, 0)\|}(\alpha_1, \alpha_2, 0)$. Donc f admet bien un unique minimum global sur C, et il est de plus localisé sur ∂C (2pt).