Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
M1 MMA 2024-2025

Optimisation sous Contraintes - Interro n°3

Durée 35mn. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (5pt)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de codimension $p \in \mathbb{N}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et notons $A = x_0 + F$, le sous-espace affine de direction F contenant x_0. On note $(u_1, \ldots, u_p)$ une base de $F^\perp$ et on pose pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, $h_j : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle u_j, x\rangle - \langle u_j, x_0\rangle$.

1. Montrer que $A = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \forall j \in \{1, \ldots, p\}, h_j(x) = 0\}$.
2. Déterminer l'ensemble des points réguliers de A.
3. En déduire que pour tout $x \in A$, $T_A(x) = F$ puis que $T_A(x)^* = F^\perp$. *Indication : on utilisera le cône linéarisant à A en x.*

Exercice 2 (12.5pt)

On définit $C = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, f_1(x) \leqslant 0, h_1(x) = 0\}$ où

$$f_1 : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \frac{1}{2}\|x\|_2^2 - \frac{1}{2},$$
$$h_1 : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \langle e_3, x\rangle.$$

On admettra que C est un convexe non vide.

On pose également $f : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \langle \alpha, x\rangle$ où $\alpha \in \mathbb{R}^3$ et on s'intéresse au problème d'optimisation $\inf_C f$.

1. Montrer qu'il existe au moins un élément de C qui satisfait les conditions KKT pour les contraintes définissant C.
2. En déduire que f admet au moins un minimum global sur C.
3. On suppose que $\alpha \notin \mathrm{Vect}(e_3)$. Montrer grâce aux précédentes questions qu'alors f admet un unique minimum global sur C.