Nom :
Prénom :
No étudiant :

Université Paris Cité
UFR Mathématiques et Informatique
2023-2024

# M1 MMA - Optimisation sous Contraintes - Interro n°3 / TP évalué

*Contexte général.*

Vous allez implémenter l'algorithme Frank-Wolfe (FW) permettant de résoudre les problèmes d'optimisation de la forme

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf_{x\in C} f(x),$$

où

- $C$ est un convexe compact non vide de $\mathbb{R}^n$,
- $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant $C$, convexe sur le convexe $C$, et telle que $\nabla f$ est $L$-Lipschitz sur $C$, pour un certain $L \geqslant 0$.

*Définition algorithme FW.*

L'algorithme de FW produit une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $C$ telle que pour $x_0 \in C$ choisi par l'utilisateur, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} s_k \in \operatorname{argmin}_{s\in C} \langle \nabla f(x_k),\, s\rangle\,, \\ \lambda_k = \frac{2}{k+2}, \\ x_{k+1} = (1-\lambda_k)x_k + \lambda_k s_k. \end{cases}$$

*Contexte particulier à l'évaluation.*

A partir de maintenant on suppose que $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2}\left\|Ax-y\right\|_2^2$ avec $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $y \in \mathbb{R}^m$ et que $C$ est la boule unité fermée pour la norme $\ell_1$ i.e.

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \;/\; \|x\|_1 \leqslant 1\}.$$

*Questions.*

1. Montrer que l'on peut appliquer l'algorithme Frank-Wolfe à notre problème $(\mathcal{P})$.
2. Montrer que nos problèmes $(\mathcal{P})$ et

$$(\mathcal{L}) \qquad \inf_{s\in C} \langle \nabla f(\tilde{x}),\, s\rangle\,,$$

pour tout $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ fixé, sont bien posés.

> On rappelle pour la suite que le problème $(\mathcal{L})$ admet au moins une solution parmi les points extrêmes de $C$, c'est-à-dire les éléments
>
> $$\operatorname{Ext}(C) = \{e_1, -e_1, e_2, -e_2, \ldots, e_n, -e_n\},$$
>
> où $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Plus précisément,
>
> $$s = -\operatorname{sign}\left((\nabla f(\tilde{x}))_{k_0}\right) e_{k_0} \quad \text{avec} \quad k_0 \in \operatorname{argmax}_{1\leqslant k\leqslant n} |(\nabla f(\tilde{x}))_k|,$$
>
> est solution de $(\mathcal{L})$. Voir la correction de l'interro no2 au besoin.

3. Implémenter l'algorithme Frank-Wolfe et l'utiliser pour la résolution de notre problème $(\mathcal{P})$ lorsque

$$n = m = 3, \quad A = I_3, \quad y = (3.4, 3.3, 3.3).$$

*Indication : on pourra utiliser la commande Python* v.argmin() *qui permet, lorsque v est un array, de renvoyer l'indice $k_0$ tel que $v_{k_0} = \min_k v_k$.*

4. Illustrer alors la convergence de l'algorithme Frank-Wolfe. <u>Bonus :</u> commenter la vitesse de convergence.