Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
M1 MMA 2024-2025

Optimisation sous Contraintes - Interro n°2

Durée 40mn. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (7.5pt)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et notons $A = x_0 + F$.

1. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ et $x \in C$. Rappeler l'expression de $T_C(x)$ en fonction de C lorsque C est convexe.

2. Soit $x \in A$. Montrer que $T_A(x) = F$.

3. Soit $x \in A$. En déduire que $T_A(x)^* = F^\perp$.

4. Soit $y \in \mathbb{R}^n$. En déduire que la projection de y sur A est $x_0 + p_F(y - x_0)$, où p_F est la projection orthogonale sur F. *Indication : on utilisera, en cas de besoin, sans justification que p_F est linéaire.*

Correction.

1. On a $T_C(x) = \overline{\mathbb{R}_+^*(C - x)}$ (0.5pt).

2. (3pt)A est un convexe car F est un sev donc est convexe. Ainsi $T_A(x) = \overline{\mathbb{R}_+^*(A - x)}$. Comme $x \in A$, il existe $h_x \in F$ tel que $x = x_0 + h_x$. Montrons par double inclusion que $A - x = F$.
($\supset$) Soit $h \in F$, alors $h = x_0 + h + h_x - (x_0 + h_x) = x_0 + (h + h_x) - x$. Comme F est un sev, $h + h_x \in F$ d'où $h \in A - x$.
($\subset$) Soit $h \in A - x$, i.e. $h = x_0 + h' - (x_0 + h_x) = h' - h_x$, avec $h' \in F$. D'où $h \in F$.
Comme F est un sev de $\mathbb{R}^n$, on a $\mathbb{R}_+^* F = F$. De plus F est fermé (en tant que sev d'un ev de dimension finie), donc finalement on obtient bien que $T_A(x) = F$.

3. (2pt)Raisonnons par double inclusion.
($\supset$) Soit $p \in F^\perp$. Donc pour tout $h \in T_A(x) = F$, on a $\langle p,\, h\rangle = 0$, d'où $p \in T_A(x)^*$.
($\subset$) Soit $p \in T_A(x)^*$. Soit $h \in F$, alors $\langle p,\, h\rangle \geqslant 0$. On a également $-h \in F$ donc $\langle p,\, -h\rangle \geqslant 0$. Ainsi $\langle p,\, h\rangle = 0$. Comme c'est vrai pour tout $h \in F$, $p \in F^\perp$.

4. (2pt)Notons $p_A(y)$ la projection de y sur A. Alors par définition $p_A(y)$ est caractérisé par le fait que $\nabla f(p_A(y)) \in T_A(p_A(y))^*$ où $f : x \mapsto \frac{1}{2}\|y - x\|_2^2$. Ainsi $p_A(y) = x_0 + p_F(y - x_0)$ si et seulement si $x_0 + p_F(y - x_0) - y \in F^\perp$. Or c'est bien le cas car $p_F(x_0 + p_F(y - x_0) - y) = 0$ par linéarité de p_F et le fait que $p_F \circ p_F = p_F$.

Exercice 2 (14pt)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $C = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x\|_\infty \leqslant 1\}$. On admet que l'ensemble des points extrêmes de C est l'ensemble $\mathrm{Ext}(C) = \{v \in \mathbb{R}^n \,/\, \forall i \in \{1, \ldots, n\},\, v_i \in \{-1, 1\}\}$.

1. Donner le cardinal de $\mathrm{Ext}(C)$.

2. On suppose dans cette question que $n = 2$. Pour tout $v \in \mathrm{Ext}(C)$, représenter $T_C(v)$ et $T_C(v)^*$.

3. Soit $v \in \mathrm{Ext}(C)$. On note, pour tout $v \in \mathrm{Ext}(C)$,
$$\mathcal{O}(v) = \{h \in \mathbb{R}^n \,/\, \forall i \in \{1, \ldots, n\},\, h_i v_i \leqslant 0\}.$$
   a) Montrer que $T_C(v) = \mathcal{O}(v)$. *Indication : on pourra raisonner par double inclusion et pour ~~$T_C(v) \subset \mathcal{O}(v)$~~ $T_C(v) \supset \mathcal{O}(v)$, utiliser la notion de direction admissible.*
   b) En déduire que $T_C(v)^* = \mathcal{O}(v)$.

4. Applications.
   a) Soit $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax,\, x\rangle - \langle b,\, x\rangle + c$, avec A une matrice symétrique positive de taille $n \times n$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe $v \in \mathrm{Ext}(C)$ tel que $Av - b \in \mathcal{O}(v)$. Montrer que f admet un minimum global sur C qui appartient à $\mathrm{Ext}(C)$.
   b) Soit $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle \alpha,\, x\rangle$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On admet que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{v \in \mathrm{Ext}(C)} \mathcal{O}(v)$. Montrer que f a au moins un minimum global sur C qui appartient à $\mathrm{Ext}(C)$.

Correction.

14 = 0.5 + 2.5 + (4 + 3) + (2.5 + 1.5)

1. On a $\mathrm{card}(\mathrm{Ext}(C)) = 2^n$ (0.5pt).

2. On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a alors $\mathrm{Ext}(C) = \{e_1 + e_2, -e_1 + e_2, -e_1 - e_2, e_1 - e_2\}$. Pour la représentation demandée, voire Figure 1 (2.5pt).

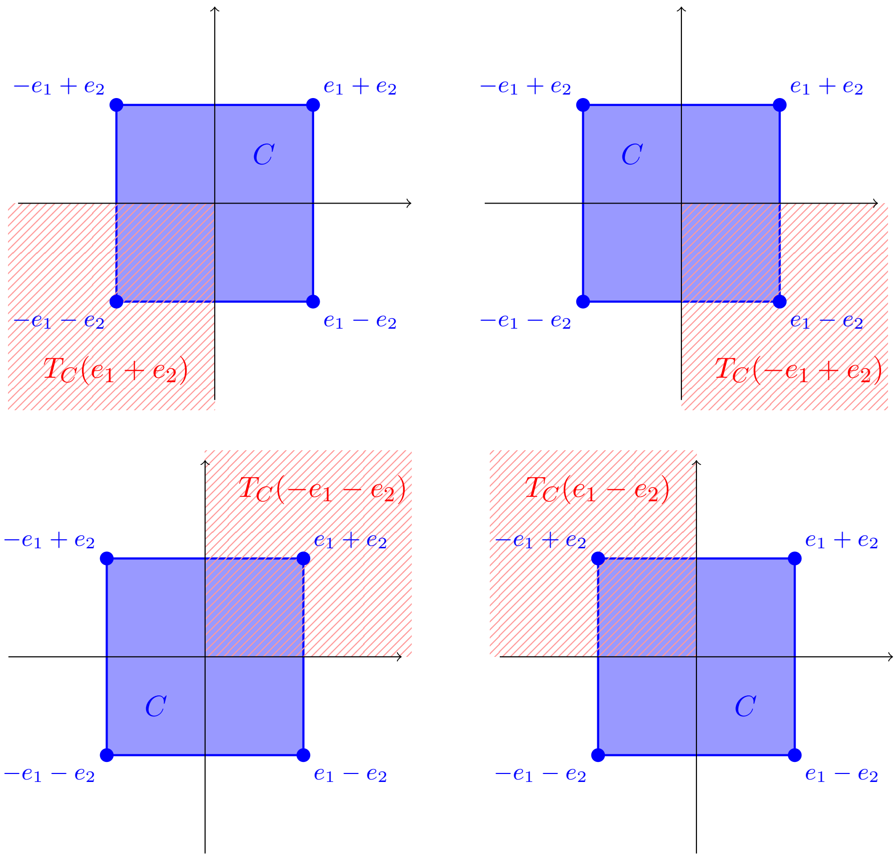

FIGURE 1. L'ensemble $T_C(v)$ est représenté dans chacun des quatre cas pour $v \in \mathrm{Ext}(C)$. On note qu'à chaque fois $T_C(v)$ est un quart du plan, par exemple $T_C(-e_1 - e_2) = (\mathbb{R}_+)^2$ (c'est l'orthant positif), de sorte que l'on a toujours $T_C(v)^* = T_C(v)$.

3. a) (4pt) Montrons l'égalité par double inclusion.

($\subset$) Soit $h \in C - v$, *i.e.* $h = x - v$ avec $\|x\|_\infty \leqslant 1$. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$,

— si $v_i \geqslant 0$, alors $v_i = 1$, donc $x_i \leqslant v_i$ et donc $h_i v_i = (x_i - v_i)v_i \leqslant 0$,

— si $v_i < 0$, alors $v_i = -1$, donc $x_i \geqslant v_i$ et donc de nouveau $h_i v_i \leqslant 0$.

On a ainsi montré que $C - v \subset \mathcal{O}(v)$. Or $\mathcal{O}(v)$ est un cône donc $\mathbb{R}_+^* \mathcal{O}(v) \subset \mathcal{O}(v)$, et par conséquent $\mathbb{R}_+^*(C - v) \subset \mathcal{O}(v)$. Enfin $\mathcal{O}(v)$ est fermé, donc $T_C(v) = \overline{\mathbb{R}_+^*(C - v)} \subset \overline{\mathcal{O}(v)} = \mathcal{O}(v)$.

($\supset$) Soit $h \in \mathcal{O}(v)$. Montrons que h est une direction admissible à C en v, ce qui permettra de conclure que $h \in T_C(v)$. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$,

— si $v_i \geqslant 0$, alors $v_i = 1$, et comme $h_i v_i \leqslant 0$ alors $h_i \leqslant 0$. Ainsi pour tout $t > 0$, on a $v_i + t h_i \leqslant v_i = 1$ et il existe $t_i > 0$ tel que pour tout $t \in]0, t_i]$, $v_i + t_i h_i \geqslant -1$,

— si $v_i < 0$, alors $v_i = -1$, et comme $h_i v_i \leqslant 0$ alors $h_i \geqslant 0$. Ainsi pour tout $t > 0$, on a $v_i + t h_i \geqslant v_i = -1$ et il existe $t_i > 0$ tel que pour tout $t \in]0, t_i]$, $v_i + t h_i \leqslant 1$.

Ainsi dans tous les cas on a trouvé $t_i > 0$ tel que $|v_i + t_i h_i| \leqslant 1$. Notons $t_0 = \min(t_1, \dots, t_n) > 0$. Alors pour tout $t \in]0, t_0]$, on a $|v_i + t h_i| \leqslant 1$ *i.e.* $v + th \in C$. Ainsi h est bien une direction admissible à C en v.

b) (3pt) Il s'agit de montrer d'après la précédente question que $\mathcal{O}(v)^* = \mathcal{O}(v)$. Prouvons encore une fois l'égalité par double inclusion.

($\subset$) Soit $p \in \mathcal{O}(v)^*$. S'il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $p_i v_i > 0$ alors posons $h \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $j \neq i$, $h_j = 0$ et $h_i = -p_i$. On a donc $h_i v_i < 0$ et pour tout $j \neq i$, $h_j v_j = 0$, d'où $h \in \mathcal{O}(v)$. Par conséquent on a $\langle p,\, h\rangle \geqslant 0$ puisque $p \in \mathcal{O}(v)^*$. Or $\langle p,\, h\rangle = -p_i^2 < 0$. Absurde. Ainsi pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a $p_i v_i \leqslant 0$ *i.e.* $p \in \mathcal{O}(v)$.

($\supset$) Soit $p \in \mathcal{O}(v)$ et prenons $h \in O(v)$. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $p_i h_i = p_i v_i^2 h_i = (p_i v_i)(h_i v_i)$, or $p_i v_i \leqslant 0$ et $h_i v_i \leqslant 0$, donc $p_i h_i \geqslant 0$. Ainsi $\langle p, h\rangle = \sum_{i=1}^n p_i h_i \geqslant 0$ *i.e.* $p \in \mathcal{O}(v)$.

4. a) (2.5pt) La fonction f est une fonctionnelle quadratique convexe sur $\mathbb{R}^n$ (donc sur le convexe C) car A est positive. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(x) = Ax - b$, donc d'après les précédentes questions l'assertion $Av - b \in \mathcal{O}(v)$ se réécrit $\nabla f(v) \in T_C(v)^*$. C'est une condition d'optimalité d'ordre 1 qui est suffisante pour assurer que v soit un minimum global quand f est convexe sur C. Ainsi f admet bien un minimum global sur C qui est dans l'ensemble des points extrêmes de C.

   b) (1.5pt) On a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(x) = \alpha$ et d'après la propriété admise, il existe donc $v \in \mathrm{Ext}(C)$ tel que $\alpha \in \mathcal{O}(v)$. On a donc comme dans la question précédente $\nabla f(x) \in T_C(v)^*$. La fonction f étant convexe sur C (car linéaire), v est donc un minimum global de f sur C.