Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
M1 MMA 2024-2025

Optimisation sous Contraintes - Interro n°2

Durée 40mn. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (7.5pt)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et notons $A = x_0 + F$.

1. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ et $x \in C$. Rappeler l'expression de $T_C(x)$ en fonction de C lorsque C est convexe.
2. Soit $x \in A$. Montrer que $T_A(x) = F$.
3. Soit $x \in A$. En déduire que $T_A(x)^* = F^\perp$.
4. Soit $y \in \mathbb{R}^n$. En déduire que la projection de y sur A est $x_0 + p_F(y - x_0)$, où p_F est la projection orthogonale sur F. *Indication : on utilisera, en cas de besoin, sans justification que p_F est linéaire.*

Exercice 2 (14pt)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $C = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x\|_\infty \leqslant 1\}$. On admet que l'ensemble des points extrêmes de C est l'ensemble $\mathrm{Ext}(C) = \{v \in \mathbb{R}^n \,/\, \forall i \in \{1, \dots, n\},\, v_i \in \{-1, 1\}\}$.

1. Donner le cardinal de $\mathrm{Ext}(C)$.
2. On suppose dans cette question que $n = 2$. Pour tout $v \in \mathrm{Ext}(C)$, représenter $T_C(v)$ et $T_C(v)^*$.
3. Soit $v \in \mathrm{Ext}(C)$. On note, pour tout $v \in \mathrm{Ext}(C)$,
$$\mathcal{O}(v) = \{h \in \mathbb{R}^n \,/\, \forall i \in \{1, \dots, n\},\, h_i v_i \leqslant 0\}.$$
   a) Montrer que $T_C(v) = \mathcal{O}(v)$. *Indication : on pourra raisonner par double inclusion et pour* $\cancel{T_C(v) \subset \mathcal{O}(v)}$ $T_C(v) \supset \mathcal{O}(v)$*, utiliser la notion de direction admissible.*

   b) En déduire que $T_C(v)^* = \mathcal{O}(v)$.
4. Applications.

   a) Soit $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle + c$, avec A une matrice symétrique positive de taille $n \times n$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe $v \in \mathrm{Ext}(C)$ tel que $Av - b \in \mathcal{O}(v)$. Montrer que f admet un minimum global sur C qui appartient à $\mathrm{Ext}(C)$.

   b) Soit $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle \alpha, x\rangle$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On admet que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{v \in \mathrm{Ext}(C)} \mathcal{O}(v)$. Montrer que f a au moins un minimum global sur C qui appartient à $\mathrm{Ext}(C)$.