

Nom :  
Prénom :  
No étudiant :

Université Paris Cité  
UFR Mathématiques et Informatique  
2023-2024

## M1 MMA - Optimisation sous Contraintes - Interro n°2

*Durée 35mn. Aucun document n'est autorisé.*

### Exercice 1

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $e_k$  le  $k$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Dans la suite on considère les ensembles

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\|_1 = 1\} \quad \text{et} \quad C = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\|_1 \leq 1\}.$$

On fixe  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$  avec  $\alpha \neq 0$  et on considère la fonction  $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle \alpha, x \rangle$ .

On va s'intéresser aux problèmes d'optimisation suivant

$$(\mathcal{P}_1) \quad \inf_{x \in S} f(x),$$

et

$$(\mathcal{P}_2) \quad \inf_{x \in C} f(x).$$

- Montrer que les problèmes  $(\mathcal{P}_1)$  et  $(\mathcal{P}_2)$  sont bien posés.
  - Écrire les conditions d'optimalité d'ordre 1 pour chacun des problèmes  $(\mathcal{P}_1)$  et  $(\mathcal{P}_2)$ . A-t-on, a priori, dans chaque situation une condition nécessaire et suffisante?
  - Soit  $x_0 \in C$  un minimum global de  $f$  sur  $C$ . Montrer que  $x_0 \in \partial C = S$ .
- Dans cette question uniquement, on suppose  $n = 2$ .
  - Représenter, sans justifications, sur des dessins séparés  $T_S(e_1)$ ,  $T_S(e_1)^*$ ,  $T_C(e_1)$  et  $T_C(e_1)^*$ .
  - Grâce à vos dessins, et aux conditions d'optimalités d'ordre 1 des différents problèmes, montrer que si  $e_1$  est un minimum local de  $f$  sur  $S$ , alors c'est aussi un minimum global de  $f$  sur  $C$ .
  - On suppose que  $\alpha = (-1, 2)$ . Identifier graphiquement parmi les éléments  $e_1, -e_1, e_2, -e_2$ , en vous aidant des conditions d'optimalité d'ordre 1, lequel est un minimum global de  $f$  sur  $C$ .
- Nous allons montrer que  $f$  admet nécessairement un minimum global parmi les points extrêmes de  $C$ , c'est-à-dire parmi les éléments  $\{e_1, -e_1, e_2, -e_2, \dots, e_n, -e_n\}$ .

On considère  $k_0 \in \operatorname{argmax}_{1 \leq k \leq n} |\alpha_k|$ .

  - Montrer que  $|\alpha_{k_0}| > 0$ .On définit alors  $\operatorname{sign}(\alpha_{k_0}) = 1$  si  $\alpha_{k_0} > 0$  et  $\operatorname{sign}(\alpha_{k_0}) = -1$  si  $\alpha_{k_0} < 0$ .
  - Montrer que  $-\operatorname{sign}(\alpha_{k_0})e_{k_0}$  satisfait les conditions d'optimalité d'ordre 1 de  $(\mathcal{P}_2)$ .
  - Conclure.