Nom :
Prénom :
No étudiant :

Université Paris Cité
UFR Mathématiques et Informatique
2023-2024

M1 MMA - Optimisation sous Contraintes - Interro n°2

Durée 35mn. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, e_k le k-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Dans la suite on considère les ensembles

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x\|_1 = 1\} \quad \text{et} \quad C = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x\|_1 \leqslant 1\}.$$

On fixe $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $\alpha \neq 0$ et on considère la fonction $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle \alpha, x \rangle$.

On va s'intéresser aux problèmes d'optimisation suivant

$$(\mathcal{P}_1) \qquad \inf_{x \in S} f(x),$$

et

$$(\mathcal{P}_2) \qquad \inf_{x \in C} f(x).$$

1. a) Montrer que les problèmes $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont bien posés.

   b) Écrire les conditions d'optimalité d'ordre 1 pour chacun des problèmes $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$. A-t-on, a priori, dans chaque situation une condition nécessaire et suffisante ?

   c) Soit $x_0 \in C$ un minimum global de f sur C. Montrer que $x_0 \in \partial C = S$.

2. Dans cette question uniquement, on suppose $n = 2$.

   a) Représenter, sans justifications, sur des dessins séparés $T_S(e_1)$, $T_S(e_1)^*$, $T_C(e_1)$ et $T_C(e_1)^*$.

   b) Grâce à vos dessins, et aux conditions d'optimalités d'ordre 1 des différents problèmes, montrer que si e_1 est un minimum local de f sur S, alors c'est aussi un minimum global de f sur C.

   c) On suppose que $\alpha = (-1, 2)$. Identifier graphiquement parmi les éléments $e_1, -e_1, e_2, -e_2$, en vous aidant des conditions d'optimalité d'ordre 1, lequel est un minimum global de f sur C.

3. Nous allons montrer que f admet nécessairement un minimum global parmi les points extrêmes de C, c'est-à-dire parmi les éléments $\{e_1, -e_1, e_2, -e_2, \dots, e_n, -e_n\}$.

   On considère $k_0 \in \operatorname{argmax}_{1 \leqslant k \leqslant n} |\alpha_k|$.

   a) Montrer que $|\alpha_{k_0}| > 0$.

   On définit alors $\operatorname{sign}(\alpha_{k_0}) = 1$ si $\alpha_{k_0} > 0$ et $\operatorname{sign}(\alpha_{k_0}) = -1$ si $\alpha_{k_0} < 0$.

   b) Montrer que $-\operatorname{sign}(\alpha_{k_0}) e_{k_0}$ satisfait les conditions d'optimalité d'ordre 1 de $(\mathcal{P}_2)$.

   c) Conclure.