Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
M1 MMA 2024-2025

Optimisation sous Contraintes - Interro n°1

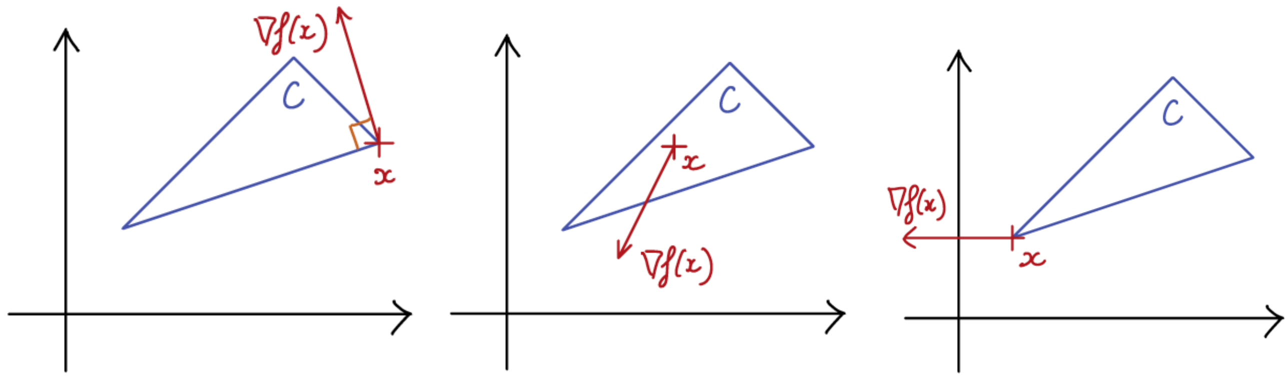
Durée 30mn. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (4.25pt)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Soit C un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$.

1. On suppose dans cette question que $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$ et $\nabla f(e_1) = e_2$ où $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$. Montrer que $\cancel{x}$ e_1 ne peut être un minimum local de f sur C.

2. Pour chacune des figures suivantes, dire (en justifiant brièvement) si l'élément $x \in C$ peut être un minimum local de f sur C ou pas.



(a) (b) (c)

Correction.
4.25 = 2 + 2.25

1. L'ensemble C est un convexe de $\mathbb{R}^2$ car c'est la boule unité fermé de la norme euclidienne. Supposons par l'absurde que e_1 est un minimum local de f sur C. Alors nécessairement on a

$$\forall y \in C, \quad \langle \nabla f(e_1),\, y - e_1 \rangle \geqslant 0. \ (1pt)$$

Or $y = -\frac{1}{2}(e_1 + e_2) \in C$, d'où $\langle \nabla f(e_1),\, y - e_1\rangle = \left\langle e_2,\, -\frac{3}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 \right\rangle = -\frac{1}{2} < 0$. Contradiction. Donc e_1 ne peut être un minimum local de f sur C (1pt).

2. Notons que l'ensemble C proposé est convexe, une condition nécessaire pour que x soit un minimum local de f sur C est : pour tout $y \in C$, $\langle \nabla f(x),\, y - x\rangle \geqslant 0$. Ceci signifie géométriquement que $\nabla f(x)$ doit former un angle aigu avec toutes les directions $y - x$ avec $y \in C$ (0.5pt).

Concernant la figure 1(a), $\nabla f(x)$ forme bien un angle aigu avec toutes les directions $y - x$ pour $y \in C$. Donc x peut être un minimum local de f sur C (0.5pt).

Concernant la figure 1(b), comme $x \in \mathring{C}$, si x était un minimum local de f sur C alors on aurait $\nabla f(x) = 0$. Ce qui n'est pas le cas ici. Donc x ne peut être un minimum local de f sur C (0.75pt).

Concernant la figure 1(c), $\nabla f(x)$ forme un angle obtus avec toutes les directions (donc au moins une) $y - x$ pour $y \in C$. Donc x ne peut être un minimum local de f sur C (0.5pt).

Exercice 2 (11.5pt)

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. On pose $C = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x\|_\infty \leqslant 1\}$.

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - y\|_2^2$ avec $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $y \in \mathbb{R}^m$. On suppose que $\ker(A) = \{0\}$. Montrer que f admet un unique minimum global sur C.

2. On suppose dans cette question que $n = 2$.
   a) Représenter C et montrer que $e_1 + e_2$ est un point extrême de C.
   b) Identifier sur votre dessin les autres points extrêmes de C.
   c) Question bonus. On définit $g : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \langle \alpha,\, x\rangle$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Montrer que g admet un minimum global sur C. Puis prouver que l'un des points extrêmes de C est un minimum global de g sur C.

Correction.

11.5 = 4.5 + (2.5 + 0.5 + 4)

1. L'ensemble C est fermé borné dans $\mathbb{R}^n$, donc compact dans $\mathbb{R}^n$, puisque c'est la boule unité fermé pour la norme infinie. La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ puisque polynomiale (à plusieurs variables), donc continue sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi la fonction f est bornée et atteint ses bornes sur C, donc f admet un minimum global sur C (1.25pt).

On a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(x) = A^T(Ax-y)$, puis $\nabla^2 f(x) = A^T A$ (1pt). Soit $h \in \mathbb{R}^n$, alors $\langle \nabla^2 f(x)h,\, h\rangle = \langle A^T Ah,\, h\rangle = \langle Ah,\, Ah\rangle = \|Ah\|_2^2 \geqslant 0$. Et en particulier $\langle \nabla^2 f(x)h,\, h\rangle = 0$ si et seulement si $Ah = 0$ i.e. $h = 0$ puisque $\ker(A) = \{0\}$. Ainsi $A^T A$ est une matrice symétrique définie positive et donc f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$ (1.5pt). L'ensemble C est convexe puisque c'est une boule, donc f est strictement convexe sur C et par conséquent f admet bien un unique minimum globale sur C (0.75pt).

2. a) Pour la représentation, voire Figure 1 (0.5pt).

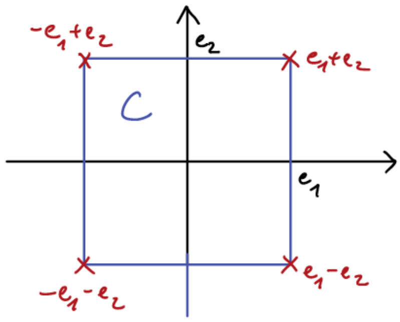


FIGURE 1. Représentation de l'ensemble C ainsi que ses points extrêmes en rouge.

Montrons que $e_1 + e_2$ est un point extrême de C. Soient $x, y \in C$ tel que $e_1 + e_2 = \frac{1}{2}(x + y)$. Écrivons $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ et $y = y_1 e_1 + y_2 e_2$ de sorte que par identification on ait $1 = \frac{1}{2}(x_1 + y_1)$ et $1 = \frac{1}{2}(x_2 + y_2)$. Comme $x, y \in C$, on a $\|x\|_\infty \leqslant 1$ et $\|y\|_\infty \leqslant 1$, donc $|x_1| \leqslant 1$, $|x_2| \leqslant 1$, $|y_1| \leqslant 1$, $|y_2| \leqslant 1$. Supposons par l'absurde que $x_1 < 1$, alors $\frac{1}{2}(x_1 + y_1) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y_1 \leqslant 1$. Absurde, donc $x_1 = 1$. On montre de même que $y_1 = x_2 = y_2 = 1$. Ainsi $x = y = e_1 + e_2$. D'où $e_1 + e_2$ est bien un point extrême de C (2pt).

b) L'ensemble des points extrêmes de C est $\{\varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 \,/\, (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{\pm 1\}^2\}$. Voir Figure 1 (0.5pt).

c) La fonction g est continue $\mathbb{R}^2$ car linéaire, donc continue sur le compact C. Ainsi g est bornée et atteint ses bornes sur C, et en particulier admet un minimum global sur C (0.75pt).

Notons $x = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2$ avec $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1, 1\}^2$ un point extrême de C. On va chercher des contraintes sur ε_1 et ε_2 de sorte que x soit un minimum global de g sur C. Notons tout d'abord que g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $x' \in \mathbb{R}^2$, $\nabla g(x') = \alpha = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$. On a

$$\begin{aligned} \forall y \in C,\ \langle \nabla g(x),\, y - x\rangle \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall y = (y_1, y_2) \in C,\ \langle \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,\, (y_1 - \varepsilon_1)e_1 + (y_2 - \varepsilon_2)e_2\rangle \geqslant 0, \\ &\Leftrightarrow \quad \forall y = (y_1, y_2) \in C,\ \alpha_1(y_1 - \varepsilon_1) + \alpha_2(y_2 - \varepsilon_2) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Notons la fonction signe : sign : $\mathbb{R} \to \{-1, 1\}$ telle que pour tout $t \geqslant 0$, $\text{sign}(t) = 1$ et tout $t < 0$, $\text{sign}(t) = -1$.

—Si $\text{sign}(\alpha_1) = -1$, alors en posant $\varepsilon_1 = -\text{sign}(\alpha_1)$, on obtient pour tout $y_1 \in [-1, 1]$, $y_1 - \varepsilon_1 = y_1 - 1 \leqslant 0$ et donc $\alpha_1(y_1 - \varepsilon_1) \geqslant 0$.

—Si $\text{sign}(\alpha_1) = 1$, alors en posant toujours $\varepsilon_1 = -\text{sign}(\alpha_1)$, on obtient pour tout $y_1 \in [-1, 1]$, $y_1 - \varepsilon_1 = y_1 + 1 \geqslant 0$ et donc $\alpha_1(y_1 - \varepsilon_1) \geqslant 0$.

On montre de même qu'en posant $\varepsilon_2 = -\text{sign}(\alpha_2)$, alors on a pour tout $y_2 \in [-1, 1]$, $\alpha_2(y_2 - \varepsilon_2) \geqslant 0$.

Ainsi on a prouvé que $x = -(\text{sign}(\alpha_1)e_1 + \text{sign}(\alpha_2)e_2)$, point extrême de C, satisfait pour tout $y \in C$, $\langle \nabla g(x),\, y - x\rangle \geqslant 0$. D'où g admet bien un point extrême de C comme minimum global sur C (3.25pt).