

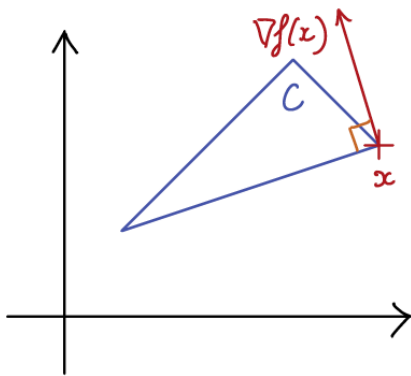
Optimisation sous Contraintes - Interro n°1

Durée 30mn. Aucun document n'est autorisé.

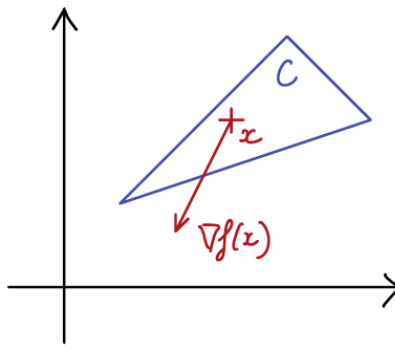
Exercice 1 (4.25pt)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Soit C un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$.

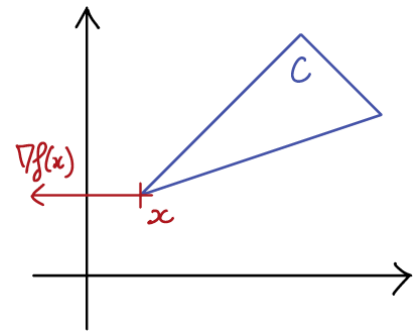
- On suppose dans cette question que $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ et $\nabla f(e_1) = e_2$ où $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Montrer que e_1 ne peut être un minimum local de f sur C .
- Pour chacune des figures suivantes, dire (en justifiant brièvement) si l'élément $x \in C$ peut être un minimum local de f sur C ou pas.



(a)



(b)



(c)

Exercice 2 (11.5pt)

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. On pose $C = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\|_\infty \leq 1\}$.

- Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - y\|_2^2$ avec $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $y \in \mathbb{R}^m$. On suppose que $\ker(A) = \{0\}$. Montrer que f admet un unique minimum global sur C .
- On suppose dans cette question que $n = 2$.
 - Représenter C et montrer que $e_1 + e_2$ est un point extrême de C .
 - Identifier sur votre dessin les autres points extrêmes de C .
 - Question bonus. On définit $g : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \langle \alpha, x \rangle$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Montrer que g admet un minimum global sur C . Puis prouver que l'un des points extrêmes de C est un minimum global de g sur C .