

Nom :
Prénom :
No étudiant :

Université Paris Cité
UFR Mathématiques et Informatique
2023-2024

M1 MMA - Optimisation sous Contraintes - Interro n°1

Durée 35mn. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (11pt)

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que L est symétrique définie positive.

On considère la relation d'ordre (partielle) sur \mathbb{R}^m suivante

$$\forall y, y' \in \mathbb{R}^m, \quad y \preceq y' \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\}, y_i \leq y'_i.$$

On fixe $y_0 \in \mathbb{R}^m$ tel que $y_0 \in \text{Im}(A)$ et on s'intéresse au problème d'optimisation suivant

$$(\mathcal{P}) \quad \inf_{x \in S} \|Lx\|_2^2.$$

où $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \preceq y_0\}$.

1. Montrer que le problème (\mathcal{P}) est bien posé.
2. Montrer que S est convexe.
3. Le problème (\mathcal{P}) admet-il une unique solution ?
4. On suppose dans cette question que $n = 2$, $m = 3$, puis

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y_0 = (1, 1, 1).$$

L est toujours une matrice symétrique définie positive quelconque (mais ici de taille 2×2).

- a) Représenter l'ensemble S ainsi que ses éventuels points extrêmes. *Aucune justification n'est attendue.*
- b) Donner l'ensemble des solutions de (\mathcal{P}) .