

Master 1^{ère} année, MMA, 2024-2025
OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES

Examen du 16/05/2025

Durée 2h. Une feuille recto-verso de notes est autorisée.

Notations (optimisation).

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. On considère les fonctions suivantes

$$F : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \alpha \|x\|_1 \quad \text{et} \quad f : (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \alpha t,$$

où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $\alpha > 0$. On pose $M = \frac{1}{2\alpha} \|b\|_2^2 + 1 > 0$.

On s'intéresse dans la première partie aux deux problèmes d'optimisation suivants

$$(\mathcal{P}_F) \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^n} F(x),$$

et

$$(\mathcal{P}_f) \quad \inf_{(x,t) \in C} f(x, t).$$

où

$$C = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} / \|x\|_1 \leq t \text{ et } t \leq M\}.$$

Dans la seconde partie, on s'intéressera uniquement au problème

$$(\mathcal{P}_f^+) \quad \inf_{(x,t) \in C^+} f(x, t).$$

où

$$C^+ = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} / x \succeq 0_{\mathbb{R}^n}, \|x\|_1 \leq t \text{ et } t \leq M\},$$

Notations (algèbre linéaire).

- On notera $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et $1_{\mathbb{R}^n} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$.
- Pour alléger les notations, on notera $V = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, qui est donc un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n + 1$.
- La base canonique de V est donc $((e_1, 0), (e_2, 0), \dots, (e_n, 0), (0_{\mathbb{R}^n}, 1))$. Notez que $(e_i, 0)$ est bien un élément de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = V$, puisque $e_i \in \mathbb{R}^n$ et $0 \in \mathbb{R}$.
- On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ le produit scalaire canonique sur V défini par

$$\forall (x, t) \in V, \forall (x', t') \in V, \quad \langle (x, t), (x', t') \rangle_V = \langle x, x' \rangle + tt'.$$

- On peut munir V de la norme 1 : pour tout $(x, t) \in V$, $\|(x, t)\|_1 = \|x\|_1 + |t|$, ou encore de la norme 2 : pour tout $(x, t) \in V$, $\|(x, t)\|_2 = \sqrt{\|x\|_2^2 + t^2}$. Ainsi V est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie et la suite $((x_n, t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de V converge vers $(x, t) \in V$ si et seulement si $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$ et $t_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} t$.

La seconde partie peut être traitée de manière indépendante de la première en admettant au besoin les résultats nécessaires.

PARTIE I : QUESTIONS PRÉLIMINAIRES (19.5PT)

1. Montrer que le problème $(\mathcal{P}_F)$ est bien posé.
2. Montrer que la fonction F est convexe sur $\mathbb{R}^n$. Est-elle en général strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$? *Indication : on pourra fournir un exemple.*
3. a) Justifier brièvement que f est $\mathcal{C}^2$ sur V .
 b) Soient $(x, t) \in V$ et $(h, s) \in V$. Déterminer l'expression de la différentielle de f en (x, t) dans la direction (h, s) i.e. $df(x, t)(h, s)$.
 c) En déduire que $\nabla f(x, t) = (A^T(Ax - b), \alpha)$.
 d) Soit $(h', s') \in V$. Déterminer $d^2 f(x, t)((h, s), (h', s'))$. En déduire que f est convexe sur V . Puis que f n'est pas strictement convexe sur V .
4. Montrer que f admet un minimum global sur C .
5. L'objet de cette question est de montrer que les problèmes $(\mathcal{P}_F)$ et $(\mathcal{P}_f)$ sont équivalents dans le sens où leurs ensembles de solutions sont en bijection et que les infima sont égaux.
 a) Montrer que si $(x, t) \in C$ est un minimum global de f sur C , alors $t = \|x\|_1$.
 b) Soit $(x, t) \in V$. Montrer que si x est une solution de $(\mathcal{P}_F)$, alors $F(x) \leq \alpha M$. De même montrer que si (x, t) est une solution de $(\mathcal{P}_f)$, alors $f(x, t) \leq \alpha M$.
 c) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que si x est une solution de $(\mathcal{P}_F)$, alors $(x, \|x\|_1)$ est une solution de $(\mathcal{P}_f)$.
 d) En déduire que $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) = \inf_{(x, t) \in C} f(x, t)$.
 e) Soit $(x, t) \in V$. Montrer que si (x, t) est une solution de $(\mathcal{P}_f)$, alors x est une solution de $(\mathcal{P}_F)$.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

Correction.

19.5 = 1 + 3.5 + (0.25 + 1.5 + 0.75 + 2.5) + 2.5 + (1 + 1.25 + 2.5 + 0.75 + 2.5)

1. La fonction F est continue sur $\mathbb{R}^n$ et coercive puisque pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $F(x) \geq \alpha \|x\|_1 \xrightarrow{\|x\|_1 \rightarrow +\infty} +\infty$. Donc le problème $(\mathcal{P}_F)$ est bien posée (l'ensemble des contraintes étant $\mathbb{R}^n$ qui est fermé et non vide) (1pt).
2. Posons $g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$. Alors g est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ (car polynomiale) et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla g(x) = A^T(Ax - b)$ puis $\nabla^2 g(x) = A^T A$ qui est une matrice symétrique positive. Ainsi g est convexe sur $\mathbb{R}^n$. Une norme est toujours convexe, donc $F = g + \alpha \|\cdot\|_1$ est convexe sur $\mathbb{R}^n$ (2pt).

La fonction F n'est pas strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$ en général. Si la matrice $A^T A$ est définie positive alors cela sera le cas, mais rien ne dit que cette propriété est ici satisfaite. Par exemple si $n = 1$, $A = 0$ alors $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2} \|b\|_2^2 + \alpha|x|$ et comme la valeur absolue n'est pas strictement convexe sur $\mathbb{R}$, F n'est pas strictement convexe sur $\mathbb{R}$ (1.5pt).

3. a) La fonction f est polynomiale en les coefficients de ses arguments, donc f est bien $\mathcal{C}^2$ sur V (0.25pt).
 b) On a

$$\begin{aligned} f((x, t) + (h, s)) &= \frac{1}{2} \|A(x + h) - b\|_2^2 + \alpha(t + s) = f(x, t) + \langle Ah, Ax - b \rangle + \alpha s + \dot{A}hAh, \\ &= f(x, t) + \langle A^T(Ax - b), h \rangle + \alpha s + o_{h \rightarrow 0}(h). \end{aligned}$$

Ainsi par identification de la partie linéaire du développement de Taylor, on obtient $df(x, t)(h, s) = \langle A^T(Ax - b), h \rangle + \alpha s$ (1.5pt).

- c) En utilisant le produit scalaire canonique sur V , on peut réécrire : $df(x, t)(h, s) = \langle (A^T(Ax - b), \alpha), (h, s) \rangle_V$. Ainsi $\nabla f(x, t) = (A^T(Ax - b), \alpha) \in V$ (0.75pt).
 d) On a

$$df((x, t) + (h', s'))(h, s) = \langle A^T(A(x + h') - b), h \rangle + \alpha s = df(x, t)(h, s) + \langle A^T Ah', h \rangle,$$

donc par identification on obtient $d^2 f(x, t)((h, s)(h', s')) = \langle A^T Ah', h \rangle$ (1pt).

On a donc pour tout $(x, t) \in V$, tout $(h, s) \in V$, $d^2 f(x, t)((h, s), (h, s)) = \|Ah\|_2^2 \geq 0$, donc f est convexe sur V (0.75pt).

Par contre $d^2 f(x, t)$ n'est pas définie positive puisque pour $s \neq 0$, $d^2 f(x, t)((0, s), (0, s)) = 0$. Ainsi f n'est pas strictement convexe sur V (0.75pt).

4. La fonction f est continue sur V donc sur C qui est non vide. Puis C est fermé par caractérisation séquentielle des fermés : soit $((x_n, t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de C qui converge vers (x, t) , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n \leq M$ donc $t \leq M$, puis $\|x_n\|_1 \leq t_n$ donc $\|x\|_1 \leq t$, d'où $(x, t) \in C$. Ensuite C est borné car pour $(x, t) \in C$, $\|(x, t)\|_1 = \|x\|_1 + |t| \leq 2|t| \leq 2M$. Donc C est un compact de V , d'où f admet un minimum global sur C (2.5pt).

5. a) Soit $(x, t) \in C$ un minimum global de f sur C . Si $\|x\|_1 < t$, alors $f(x, \|x\|_1) < f(x, t)$, mais comme $(x, \|x\|_1) \in C$, cela contredirait le fait que (x, t) est un minimum global de f sur C . Donc $\|x\|_1 \geq t$, i.e. $t = \|x\|_1$ (1pt).

b) Supposons que x est un minimum global de F sur $\mathbb{R}^n$, on a $F(x) \leq F(0) = \frac{1}{2}\|b\|_2^2 < \alpha M$ (0.5pt). Supposons maintenant que (x, t) est un minimum global de f sur C . Comme $(0_{\mathbb{R}^n}, M) \in C$, on a $f(x, t) \leq f(0, M) = \alpha M$ (0.75pt).

c) Soit x une solution de $(\mathcal{P}_F)$. Posons $t = \|x\|_1$. Montrons tout d'abord que $(x, \|x\|_1) = (x, t) \in C$. On a directement $\|x\|_1 \leq t$. Puis comme $F(x) \leq \alpha M$ (Question 5.b)) et $\alpha\|x\|_1 \leq F(x)$, on a donc $t = \|x\|_1 \leq M$. D'où $(x, t) \in C$.

Soit $(x', t') \in C$. Alors comme x est une solution de $(\mathcal{P}_F)$, on a $F(x) \leq F(x')$ donc $f(x, \|x\|_1) \leq f(x', \|x'\|_1)$ puisque $F(x) = f(x, \|x\|_1)$ et $F(x') = f(x', \|x'\|_1)$. Or $\|x'\|_1 \leq t'$, d'où $f(x', \|x'\|_1) \leq f(x', t')$. Finalement $f(x, \|x\|_1) \leq f(x', t')$ pour tout $(x', t') \in C$ et $(x, \|x\|_1) \in C$, donc $(x, \|x\|_1)$ est une solution de $(\mathcal{P}_f)$ (2.5pt).

d) Soit x une solution de $(\mathcal{P}_F)$. Alors d'après la question précédente, $(x, \|x\|_1)$ est une solution de C . Ainsi $\inf_{\mathbb{R}^n} F = F(x) = f(x, \|x\|_1) = \inf_C f$ (0.75pt).

e) Soit $(x, t) \in C$ une solution de $(\mathcal{P}_f)$. Supposons par l'absurde que x n'est pas un minimum global de F sur C . Alors il existe $x' \in \mathbb{R}^n$ tel que $F(x') < F(x)$. Or $F(x) = f(x, \|x\|_1)$ donc $F(x') < f(x, \|x\|_1)$. De plus grâce à la question 5.a), $t = \|x\|_1$ donc $F(x') < f(x, t)$. Puis grâce à la question 5.b) $f(x, t) \leq \alpha M$, ainsi $F(x') < \alpha M$ et comme $F(x') \geq \alpha\|x'\|_1$, on déduit $\|x'\|_1 \leq M$. Par conséquent $(x', \|x'\|_1) \in C$. Enfin $F(x') < f(x, t)$ se réécrit $f(x', \|x'\|_1) < f(x, t)$ car $F(x') = f(x', \|x'\|_1)$. On obtient donc une contradiction avec le fait que (x, t) est un minimum global de f sur C . D'où x est bien un minimum global de F (sur $\mathbb{R}^n$) (2.5pt).

PARTIE II : ÉTUDE DU PROBLÈME $(\mathcal{P}_f^+)$. (22.5PT)

6. Montrer que l'on a $C^+ = \{(x, t) \in V / \forall i \in \{1, \dots, n+2\}, f_i(x, t) \leq 0\}$, où

- pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $f_i : (x, t) \in V \mapsto \langle -(e_i, 0), (x, t) \rangle_V$,
- $f_{n+1} : (x, t) \in V \mapsto \langle \sum_{i=1}^n (e_i, 0) - (0_{\mathbb{R}^n}, 1), (x, t) \rangle_V$,
- $f_{n+2} : (x, t) \in V \mapsto \langle (0_{\mathbb{R}^n}, 1), (x, t) \rangle_V - M$.

7. Montrer que C^+ est convexe. En déduire que le problème $(\mathcal{P}_f^+)$ est convexe.

8. On suppose dans cette question uniquement que $n = 1$.

a) Représenter l'ensemble $C^+ \subset \mathbb{R}^2$. Puis représenter $T_{C^+}((0, 0))$ et enfin $T_{C^+}((0, 0))^*$. Il n'est pas demandé de justifications particulières.

b) En déduire que si $(0, 0)$ est solution de $(\mathcal{P}_f^+)$, alors $\frac{1}{\alpha} A^T b \leq 1_{\mathbb{R}^n}$.

9. Justifier que f admet bien un minimum global sur C^+ .

10. a) Déterminer l'ensemble des points réguliers de C^+ . Indication : on pourra admettre que pour tout $(x, t) \in V$, toute sous famille à $n+1$ vecteurs de la famille $(\nabla f_1(x, t), \dots, \nabla f_{n+2}(x, t))$ est libre.

b) Soit $(x, t) \in V$. Prouver que (x, t) est une solution de $(\mathcal{P}_f^+)$ si et seulement si (x, t) satisfait les conditions KKT pour $(\mathcal{P}_f^+)$.

11. Soit $(x, t) \in V$. On suppose que (x, t) satisfait les conditions KKT pour $(\mathcal{P}_f^+)$.

a) Montrer qu'il existe $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ tel que

$$(1) \quad (x, t) \in C^+, \quad \lambda \succeq 0_{\mathbb{R}^{n+2}}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n+2\}, \lambda_i f_i(x, t) \geq 0,$$

$$(2) \quad A^T(Ax - b) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_{n+1}) e_i \quad \text{et} \quad \lambda_{n+1} - \lambda_{n+2} = \alpha.$$

b) Montrer que l'on a nécessairement $\lambda_{n+2} = 0$. Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

12. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\eta(x) = \frac{1}{\alpha} (A^T(b - Ax)) \in \mathbb{R}^n.$$

On note également $\text{supp}(x) = \{i \in \{1, \dots, n\} / x_i \neq 0\}$ (appelé le *support* de x).

a) Soit $(x, t) \in C^+$. Montrer, d'après ce qui précède, que (x, t) est une solution de $(\mathcal{P}_f^+)$ si et seulement si

$$(3) \quad t = \|x\|_1, \quad \eta(x) \preceq 1_{\mathbb{R}^n} \quad \text{et} \quad \text{supp}(x) \subset \{i \in \{1, \dots, n\} / \eta(x)_i = 1\}.$$

b) Applications. Retrouver le résultat de la question 8.b).

Correction.

$$22.5 = 1.5 + 1.75 + (2.25 + 1.5) + 1 + (2 + 1) + (1 + 2) + (7 + 1.5)$$

6. Soit $(x, t) \in C^+$. Alors $x \succeq 0_{\mathbb{R}^n}$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \geq 0$ i.e. $f_i(x, t) = \langle -(e_i, 0), (x, t) \rangle_V = -x_i \leq 0$ (0.5pt).

Puis comme pour tout i , $x_i \geq 0$, on a $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \langle (e_i, 0), x \rangle$ et $-t = \langle -(0_{\mathbb{R}^n}, 1), (x, t) \rangle_V$. D'où $\|x\|_1 - t \leq 0$ se réécrit bien $f_{n+1}(x, t) \leq 0$. Enfin $t \leq M$, d'après ce qui précède se réécrit $f_{n+2}(x, t) \leq 0$ (1pt).

7. D'après la précédente question, on a $C^+ = \bigcap_{i=1}^{n+2} \{f_i \leq 0\}$. Les fonctions $f_1, \dots, f_{n+1}$ sont linéaires donc convexes sur V , f_{n+2} est affine donc également convexe sur V . Ainsi les ensembles $\{f_i \leq 0\}$, pour tout i , sont convexes et donc C^+ est convexe en tant intersection de convexes (1.5pt).

La fonction f est convexe sur V (démontré en première partie) et C^+ est convexe donc le problème $(\mathcal{P}_f^+)$ est bien convexe (0.25pt).

8. a) Voir Figure 1. 0.75pt par dessin.

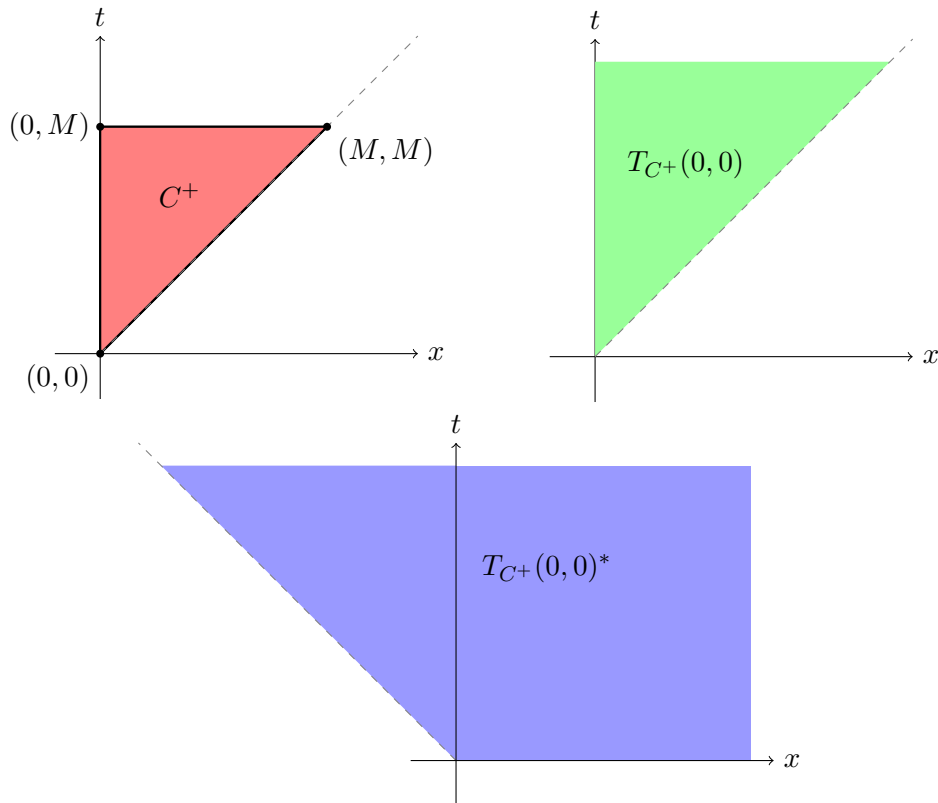


FIGURE 1. Représentations de C^+ , $T_{C^+}((0,0))$ et $T_{C^+}((0,0))^*$ lorsque $n = 1$.

b) Si $(0,0)$ est un minimum global de f sur C^+ , alors $\nabla f(0,0) \in T_{C^+}((0,0))^* = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 / t \geq 0, t \geq -x\}$. D'après la question 3.c), $\nabla f(0,0) = (-A^T b, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Comme $\alpha > 0$, $\nabla f(0,0) \in T_{C^+}((0,0))^*$ si et seulement si $\alpha \geq -(-A^T b)$ i.e. $\frac{1}{\alpha} A^T b \leq 1$ (1.5pt).

9. On a $C^+ = ((\mathbb{R}_+)^n \times \mathbb{R}) \cap C$, donc C^+ est de nouveau un ensemble fermé borné puisque C en est un. Donc C^+ est compact. La fonction f étant continue sur V , on déduit donc que f admet un minimum global sur C^+ (1pt).

10. a) Soit $(x, t) \in C^+$. C'est un point régulier si $(\nabla f_i(x, t))_{i \in I(x, t)}$, où $I(x, t)$ est l'ensemble des contraintes actives en (x, t) , est une famille libre de V .

On admet que toute sous famille à $n+1$ éléments de la famille $(\nabla f_1(x, t), \dots, \nabla f_{n+2}(x, t))$ est libre (il suffit d'écrire la définition et différencier trois cas en fonction de si on enlève un vecteur parmi les $\nabla f_i(x, t)$, ou $\nabla f_{n+1}(x, t)$, ou enfin $\nabla f_{n+2}(x, t)$). En particulier, on déduit que toute sous famille a au plus $n+1$ éléments est libre (en tant que sous famille d'une famille libre).

Supposons par l'absurde que $I(x, t) = \{1, \dots, n+2\}$. Alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $f_i(x) = 0$, d'où $x = 0$. Mais comme $f_{n+1}(x, t) = 0$ et $f_{n+2}(x, t) = 0$, on obtient $\|x\|_1 = M$. C'est impossible car $M > 0$. Ainsi $\text{card}(I(x, t)) < n+2$, i.e. $(\nabla f_i(x, t))_{i \in I(x, t)}$ est une famille contenant au plus $n+1$ vecteurs, donc est libre. Par conséquent (x, t) est régulier (2pt).

b) Si (x, t) est un minimum global de f sur C^+ , alors comme tous les points de C^+ sont réguliers on a (x, t) régulier et donc (x, t) satisfait les conditions KKT (0.5pt).

Réciproquement, si (x, t) satisfait les conditions KKT, comme le problème $(\mathcal{P}_f^+)$ est convexe, nécessairement (x, t) est un minimum global de f sur C^+ (0.5pt).

11. a) Comme (x, t) satisfait les conditions KKT, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{n+2}$ tel que

$$\begin{aligned} (x, t) &\in C^+, \\ \lambda &\succeq 0_{\mathbb{R}^{n+2}}, \\ \forall i \in \{1, \dots, n+2\}, \lambda_i f_i(x, t) &\geq 0, \\ \nabla f(x, t) + \sum_{i=1}^{n+2} \nabla f_i(x, t) &= (0_{\mathbb{R}^n}, 0). \end{aligned} \quad (1pt)$$

La seule condition à réellement simplifier est la condition de stationnarité. On a déjà vu que $\nabla f(x, t) = (A^T(Ax - b), \alpha)$. De grâce aux expressions des f_i sous forme de produits scalaires, on obtient pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $\nabla f_i(x, t) = -(e_i, 0)$, puis $\nabla f_{n+1}(x, t) = (\sum_{i=1}^n e_i, -1)$ et enfin $\nabla f_{n+2}(x, t) = (0_{\mathbb{R}^n}, 1)$. La dernière condition se réécrit donc

$$\left(A^T(Ax - b) + \sum_{i=1}^n (\lambda_{n+1} - \lambda_i) e_i, \alpha - \lambda_{n+1} + \lambda_{n+2} \right) = (0_{\mathbb{R}^n}, 0),$$

soit

$$A^T(Ax - b) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_{n+1}) e_i \quad \text{et} \quad \lambda_{n+1} - \lambda_{n+2} = \alpha \quad (1pt).$$

b) Supposons par l'absurde que $\lambda_{n+2} > 0$. Alors par condition de complémentarité, $f_{n+2}(x, t) = 0$ i.e. $t = M$ (0.5pt). On a donc $f(x, t) \geq \alpha t = \alpha M > \frac{1}{2} \|b\|_2^2 = f(0, 0)$.

Or comme (x, t) satisfait les conditions KKT, d'après la question 10.b), (x, t) est un minimum global de $(\mathcal{P}_f^+)$. On a donc $f(x, t) \leq f(0, 0)$ car $(0, 0) \in C^+$. Contradiction ! D'où $\lambda_{n+2} = 0$ (1.5pt).

12. a) On sait d'après la question 10.b) que (x, t) est solution de $(\mathcal{P}_f^+)$ si et seulement si (x, t) satisfait les conditions KKT données en question 11.a). Il s'agit donc de montrer qu'elles sont équivalentes aux conditions attendues dans cette question.

($\Rightarrow$) Supposons que les conditions de la question 11.a) sont satisfaites. On a vu en Partie I que nécessairement $t = \|x\|_1$ (car (x, t) est solution de $(\mathcal{P}_f^+)$ car satisfait les conditions KKT). On a montré à la question 11.b) que l'on a $\lambda_{n+2} = 0$, d'où $\lambda_{n+1} = \alpha$. Ainsi $A^T(Ax - b) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_{n+1}) e_i$ se réécrit $\eta(x) = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{\lambda_i}{\alpha}\right) e_i$. Or pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i \geq 0$ donc $\eta(x)_i = \langle \eta(x), e_i \rangle = 1 - \frac{\lambda_i}{\alpha} \leq 1$ i.e. $\eta(x) \leq 1_{\mathbb{R}^n}$. Enfin, soit $i \in \text{supp}(x)$, alors $f_i(x) < 0$ et donc comme $\lambda_i f_i(x) \geq 0$, on a nécessairement $\lambda_i = 0$, d'où $\eta(x)_i = 1$. On a bien montré $i \in \text{supp}(x) \subset \{i \in \{1, \dots, n\} / \eta(x)_i = 1\}$ (3.5pt).

($\Leftarrow$) Supposons que les conditions de (3) sont satisfaites. On sait par hypothèse de la question que $(x, t) \in C^+$. Il reste donc à montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{n+2}$ tel que

$$\begin{aligned} \lambda &\succeq 0_{\mathbb{R}^{n+2}}, \\ \forall i \in \{1, \dots, n+2\}, \lambda_i f_i(x, t) &\geq 0, \\ A^T(Ax - b) &= \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_{n+1}) e_i \quad \text{et} \quad \lambda_{n+1} - \lambda_{n+2} = \alpha. \end{aligned}$$

Posons $\lambda_{n+1} = \alpha > 0$ et $\lambda_{n+2} = 0$. Puis pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i = \alpha(1 - \eta(x)_i) \geq 0$ car $\eta(x)_i \leq 1$. Alors on a bien $A^T(Ax - b) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_{n+1})e_i$ et $\lambda_{n+1} - \lambda_{n+2} = \alpha$.

Il nous reste à démontrer que les conditions de complémentarité sont satisfaites. Celle pour $i = n + 2$ est directe. Comme $t = \|x\|_1$, on a $f_{n+1}(x, t) = 0$, donc $\lambda_{n+1}f_{n+1}(x, t) = 0$. Enfin soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Si $x_i = 0$ alors $\lambda_i f_i(x) = 0 \geq 0$. Sinon $i \in \text{supp}(x)$ et donc $\eta(x)_i = 1$. Comme $\lambda_i = \alpha(1 - \eta(x)_i)$, on a $\lambda_i = 0$ et donc de nouveau $\lambda_i f_i(x) = 0 \geq 0$ (3.5pt).

b) D'après la précédente question, $(0_{\mathbb{R}^n}, 0)$ est sol de $(\mathcal{P}_f^+)$ si et seulement si

$$\eta(0_{\mathbb{R}^n}) \leq 1_{\mathbb{R}^n} \quad \text{et} \quad \text{supp}(0_{\mathbb{R}^n}) \subset \{i \in \{1, \dots, n\} / \eta(0_{\mathbb{R}^n})_i = 1\}.$$

Or $\eta(0_{\mathbb{R}^n}) = \frac{1}{\alpha}A^Tb$ et $\text{supp}(0_{\mathbb{R}^n}) = \emptyset$ donc l'inclusion est toujours vraie. On a ainsi montré que $(0_{\mathbb{R}^n}, 0)$ si et seulement si $\frac{1}{\alpha}A^Tb \preceq 1_{\mathbb{R}^n}$ (1.5pt).