Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Master 1ère année, MMA, 2024-2025
Optimisation sous contraintes

Examen du 16/05/2025
Durée 2h. Une feuille recto-verso de notes est autorisée.

Notations (optimisation).
Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. On considère les fonctions suivantes

$$F : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2 + \ \alpha\|x\|_1 \qquad \text{et} \qquad f : (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2 + \ \alpha t,$$

où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $\alpha > 0$. On pose $M = \frac{1}{2\alpha}\|b\|_2^2 + 1 > 0$.
On s'intéresse dans la première partie aux deux problèmes d'optimisation suivants

$$(\mathcal{P}_F) \qquad \inf_{x \in \mathbb{R}^n} F(x),$$

et

$$(\mathcal{P}_f) \qquad \inf_{(x,t) \in C} f(x,t).$$

où

$$C = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,/\, \|x\|_1 \leqslant t \text{ et } t \leqslant M\}.$$

Dans la seconde partie, on s'intéressera uniquement au problème

$$(\mathcal{P}_f^+) \qquad \inf_{(x,t) \in C^+} f(x,t).$$

où

$$C^+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,/\, x \succeq 0_{\mathbb{R}^n},\, \|x\|_1 \leqslant t \text{ et } t \leqslant M\},$$

Notations (algèbre linéaire).

- On notera $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et $1_{\mathbb{R}^n} = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$.
- Pour alléger les notations, on notera $V = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, qui est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n + 1$.
- La base canonique de V est donc $((e_1, 0), (e_2, 0), \ldots, (e_n, 0), (0_{\mathbb{R}^n}, 1))$. Notez que $(e_i, 0)$ est bien un élément de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = V$, puisque $e_i \in \mathbb{R}^n$ et $0 \in \mathbb{R}$.
- On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ le produit scalaire canonique sur V défini par
$$\forall (x,t) \in V,\, \forall (x', t') \in V, \quad \big\langle (x,t),\, (x', t') \big\rangle_V = \big\langle x,\, x' \big\rangle + tt'.$$
- On peut munir V de la norme 1 : pour tout $(x,t) \in V$, $\|(x,t)\|_1 = \|x\|_1 + |t|$, ou encore de la norme 2 : pour tout $(x,t) \in V$, $\|(x,t)\|_2 = \sqrt{\|x\|_2^2 + t^2}$. Ainsi V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et la suite $((x_n, t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ d'élements de V converge vers $(x,t) \in V$ si et seulement si $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$ et $t_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} t$.

La seconde partie peut être traitée de manière indépendante de la première en admettant au besoin les résultats nécessaires.

Partie I : questions préliminaires (19.5pt)

1. Montrer que le problème $(\mathcal{P}_F)$ est bien posé.
2. Montrer que la fonction F est convexe sur $\mathbb{R}^n$. Est-elle en général strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$? *Indication : on pourra fournir un exemple.*
3. a) Justifier brièvement que f est $\mathcal{C}^2$ sur V.
   b) Soient $(x,t) \in V$ et $(h,s) \in V$. Déterminer l'expression de la différentielle de f en (x,t) dans la direction (h,s) *i.e.* $df(x,t)(h,s)$.
   c) En déduire que $\nabla f(x,t) = (A^T(Ax-b), \alpha)$.
   d) Soit $(h',s') \in V$. Déterminer $d^2 f(x,t)\left((h,s),(h',s')\right)$. En déduire que f est convexe sur V. Puis que f n'est pas strictement convexe sur V.
4. Montrer que f admet un minimum global sur C.
5. L'objet de cette question est de montrer que les problèmes $(\mathcal{P}_F)$ et $(\mathcal{P}_f)$ sont équivalents dans le sens où leurs ensembles de solutions sont en bijection et que les infima sont égaux.
   a) Montrer que si $(x,t) \in C$ est un minimum global de f sur C, alors $t = \|x\|_1$.
   b) Soit $(x,t) \in V$. Montrer que si x est une solution de $(\mathcal{P}_F)$, alors $F(x) \leqslant \alpha M$. De même montrer que si (x,t) est une solution de $(\mathcal{P}_f)$, alors $f(x,t) \leqslant \alpha M$.
   c) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que si x est une solution de $(\mathcal{P}_F)$, alors $(x, \|x\|_1)$ est une solution de $(\mathcal{P}_f)$.
   d) En déduire que $\inf_{x\in\mathbb{R}^n} F(x) = \inf_{(x,t)\in C} f(x,t)$.
   e) Soit $(x,t) \in V$. Montrer que si (x,t) est une solution de $(\mathcal{P}_f)$, alors x est une solution de $(\mathcal{P}_F)$. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde.*

Partie II : Étude du problème $(\mathcal{P}_f^+)$. (22.5pt)

6. Montrer que l'on a $C^+ = \{(x,t) \in V \,/\, \forall i \in \{1,\dots,n+2\},\ f_i(x,t) \leqslant 0\}$, où
   — pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $f_i : (x,t) \in V \mapsto \langle -(e_i,0),\ (x,t)\rangle_V$,
   — $f_{n+1} : (x,t) \in V \mapsto \langle \sum_{i=1}^n (e_i,0) - (0_{\mathbb{R}^n},1),\ (x,t)\rangle_V$,
   — $f_{n+2} : (x,t) \in V \mapsto \langle (0_{\mathbb{R}^n},1),\ (x,t)\rangle_V - M$.
7. Montrer que C^+ est convexe. En déduire que le problème $(\mathcal{P}_f^+)$ est convexe.
8. On suppose dans cette question <u>uniquement</u> que $n=1$.
   a) Représenter l'ensemble $C^+ \subset \mathbb{R}^2$. Puis représenter $T_{C^+}((0,0))$ et enfin $T_{C^+}((0,0))^*$. *Il n'est pas demandé de justifications particulières.*
   b) En déduire que si $(0,0)$ est solution de $(\mathcal{P}_f^+)$, alors $\frac{1}{\alpha}A^T b \preceq 1_{\mathbb{R}^n}$.
9. Justifier que f admet bien un minimum global sur C^+.
10. a) Déterminer l'ensemble des points réguliers de C^+. *Indication : on pourra admettre que pour tout $(x,t) \in V$, toute sous famille à $n+1$ vecteurs de la famille $(\nabla f_1(x,t),\dots,\nabla f_{n+2}(x,t))$ est libre.*
    b) Soit $(x,t) \in V$. Prouver que (x,t) est une solution de $(\mathcal{P}_f^+)$ si et seulement si (x,t) satisfait les conditions KKT pour $(\mathcal{P}_f^+)$.
11. Soit $(x,t) \in V$. On suppose que (x,t) satisfait les conditions KKT pour $(\mathcal{P}_f^+)$.
    a) Montrer qu'il existe $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ tel que

$$(1)\qquad (x,t) \in C^+, \quad \lambda \succeq 0_{\mathbb{R}^{n+2}}, \quad \forall i \in \{1,\dots,n+2\},\ \lambda_i f_i(x,t) \geqslant 0,$$

$$(2)\qquad A^T(Ax-b) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_{n+1}) e_i \quad \text{et} \quad \lambda_{n+1} - \lambda_{n+2} = \alpha.$$

    b) Montrer que l'on a nécessairement $\lambda_{n+2} = 0$. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde.*
12. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\eta(x) = \frac{1}{\alpha}\left(A^T(b-Ax)\right) \in \mathbb{R}^n.$$

On note également $\mathrm{supp}(x) = \{i \in \{1,\dots,n\} \,/\, x_i \neq 0\}$ (appelé le *support* de x).
    a) Soit $(x,t) \in C^+$. Montrer, d'après ce qui précède, que (x,t) est une solution de $(\mathcal{P}_f^+)$ si et seulement si

$$(3)\qquad t = \|x\|_1\,, \quad \eta(x) \preceq 1_{\mathbb{R}^n} \quad \text{et} \quad \mathrm{supp}(x) \subset \{i \in \{1,\dots,n\} \,/\, \eta(x)_i = 1\}\,.$$

    b) Applications. Retrouver le résultat de la question 8.b).