Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

M1 MMA - Optimisation sous Contraintes - DM n°1

Objectif du DM.

Implémenter l'algorithme Frank-Wolfe permettant de résoudre les problèmes d'optimisation de la forme

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf_{x \in C} f(x),$$

où

— C est un convexe compact non vide de $\mathbb{R}^n$,

— $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant C, convexe sur le convexe C, et telle que ∇f est L-Lipschitz sur C.

Cet algorithme est présenté en détails dans le sujet d'examen de 2021/2022 disponible sur la page web du cours.

Modalités.

(1) Vous réaliserez votre implémentation dans un notebook codé en Python dans un format similaire à celui des TP.

(2) Vous coderez une fonction réalisant l'algorithme Frank-Wolfe telle qu'il est décrit dans le sujet d'examen. Vous utiliserez les arguments que vous jugerez nécessaires sachant que l'idéal est que votre implémentation soit la plus générique possible.

(3) Vous coderez, dans une fonction séparée, une méthode permettant de résoudre le problème

$$(\mathcal{L}) \qquad \min_{s \in C} \langle \nabla f(x_k), s \rangle,$$

qui est une des étapes de l'algorithme Frank-Wolfe (cf le sujet d'examen).

Vous utiliserez cette fonction comme une boîte noire dans celle réalisant l'algorithme Frank-Wolfe. Pour cela vous la passerez en argument et l'utiliserez comme une fonction standard dans l'implémentation de Frank-Wolfe. En exemple vous implémenterez la méthode de l'*Algorithme 1* donné dans la correction du sujet et qui correspond au problème $(\mathcal{L})$ lorsque l'ensemble C est celui décrit dans le sujet.

L'idée derrière cette implémentation séparée d'une méthode permettant de résoudre $(\mathcal{L})$ est que si le problème $(\mathcal{P})$ change avec un nouvel ensemble de contrainte C, alors il suffira uniquement d'adapter cette fonction pour que le reste de l'algorithme Frank-Wolfe continue de fonctionner.

(4) Vous utiliserez votre algorithme pour résoudre le problème $(\mathcal{P})$ lorsque

$$f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2} \|Ax - y\|_2^2,$$

où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ avec $m < n$ et $y \in \mathbb{R}^m$. Vous fixerez A et y comme bon vous semble ! Vous pourrez vérifier que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}^n$, donc également sur le convexe C.

L'ensemble C sera celui du sujet.

(5) Pour le critère d'arrêt de l'algorithme Frank-Wolfe (FW), je vous laisse choisir celui que vous jugerez pertinent !

($\star$) Il est possible d'implémenter un critère d'arrêt testant la condition optimalité d'ordre 1 du problème $(\mathcal{P})$ en exploitant judicieusement les éléments calculés dans l'algirithme FW.

(6) Vous illustrerez de la manière que vous jugerez pertinente la convergence de l'algorithme FW.

(7) Vous pouvez réaliser toutes les représentations que vous jugerez intéressantes pour illustrer le comportement de l'algorithme.