Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

M1 MMA 2024-2025
OPTIMISATION SOUS-CONTRAINTES

Feuille de TD n°3

Approche géométrique de la dualité de Lagrange.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On considère S la n-sphère de centre e_1 et de rayon 1 et C la boule pour la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ de centre e_1 et de rayon 1.

1. Écrire S et C, le plus simplement possible, comme des ensembles de contraintes ayant la forme de celle étudiée dans le chapitre 3.
2. Déterminer l'ensemble des points réguliers de S et C.
3. Déterminer $T_S^\ell(2e_1)$ et en déduire $T_S(2e_1)$. Faire de même pour $T_C^\ell(2e_1)$ et $T_C(2e_1)$.
4. Les contraintes sont-elles qualifiées en $0_{\mathbb{R}^n}$ pour C ? Commenter.

Exercice 2

On considère le problème

$$\inf_{(x_1,x_2)\in S} x_1^2 - 14x_1 + x_2^2 - 6x_2 - 7,$$

où $S = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, x_1 + x_2 \leqslant 2 \text{ et } x_1 + 2x_2 \leqslant 3\right\}$.

1. Montrer que le problème est bien posé et admet une unique solution.
2. La déterminer à l'aide des conditions KKT.
3. Interpréter géométriquement le problème.

Exercice 3

On s'intéresse au problème

$$\inf_{(x_1,x_2)\in S} x_1^2 - x_1x_2,$$

où $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, x_2 \leqslant 2x_1 \text{ et } x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

1. Représenter graphiquement l'ensemble S sur lequel l'optimisation se fait. Quels sont les points réguliers pour les contraintes qui définissent S ?
2. Déterminer l'unique minimiseur sur S à l'aide des conditions KKT. *Indication : on pourra s'aider de l'outil informatique pour effectuer une discrimination entre les différentes possibilités.*
3. Illustrer les résultats sur Python en représentant S ainsi que les lignes de niveau de la fonction objectif.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le problème

$$\inf_{x\in S} \frac{1}{2} \|x\|_2^2 ,$$

où $S = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, Ax = b\}$ avec $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^p$. On suppose que $p < n$ [1] et $\mathrm{rg}(A) = p$.

1. Montrer que le problème est bien posé et admet une unique solution.
2. La déterminer à l'aide des conditions KKT.

1. puisque $\mathrm{rg}(A) = p$, par le théorème du rang on a nécessairement que $p \leqslant n$. Renforcer cette condition en $p < n$ permet d'éviter la situation triviale où $S = \{A^{-1}b\}$. Ainsi S est au moins une droite affine.