Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

M1 MMA 2023-2024
Optimisation Sous-Contraintes

Feuille de TD n°2

Cônes, projection.

Exercice 4

Soit $g : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur Ω ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. On considère $C = \{g \leqslant 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, g(x) \leqslant 0\}$ qui est supposé convexe et non vide.

Soit $y_0 \notin C$. L'objectif est de démontrer que si $x_0 = P_C(y_0)$ alors x_0 satisfait l'une des deux propositions

— $\nabla g(x_0) = 0$,

— $\exists \lambda > 0,\ y_0 = x_0 + \lambda \nabla g(x_0)$.

1. Justifier que x_0 est bien défini.

   On suppose dans la suite que $\nabla g(x_0) \neq 0$.
2. Proposer une heuristique géométrique justifiant la deuxième condition.
3. Montrer que $T_C(x_0) = \{h \in \mathbb{R}^n \,/\, \langle \nabla g(x_0),\, h\rangle \leqslant 0\}$. *Indication : on pourra raisonner par double inclusion.*
4. Déterminer $(T_C(x_0))^\star$ et en déduire la deuxième assertion.

<u>Correction</u>.

1. L'ensemble C est convexe non vide par hypothèse, et comme g est différentiable sur Ω, g est continue sur Ω donc C est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Donc la projection de y_0 sur C est bien définie.

2. Explications détaillées avec dessins en classe. "Brièvement" : $x_0 \in \partial C$ avec ∂C ensemble de niveau 0 de g. Si $\nabla g(x_0) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, alors $\nabla g(x_0)$ est "orthogonal" à l'ensemble de niveau 0 de g : ∂C. Plus précisément $\nabla g(x_0)$ est la normale à la direction de l'hyperplan affine tangent à ∂C en x_0. [1]. De ce fait, comme $C = g^{-1}(]-\infty, 0])$, $x_0 + T_C(x_0)$ est le demi-espace de $\mathbb{R}^n$ contenant C et de frontière l'espace affine tangent à ∂C en x_0. D'où $T_C(x_0)^* = \mathbb{R}_- \nabla g(x_0)$. Or comme x_0 est l'unique élément de C minimisant $F : x \mapsto \|x - y_0\|_2^2$ sur C, on a par condition d'optimalité d'ordre 1 : $\nabla F(x_0) = x_0 - y_0 \in T_C(x_0)^*$, d'où il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $y_0 = x_0 + \lambda \nabla g(x_0)$. On ne peut avoir $\lambda = 0$ car sinon $y_0 = x_0 \in C$.

   Montrons dans la suite cette heuristique rigoureusement.

3. Commençons par écrire le développement de Taylor à l'ordre de 1 de g en x_0, ce qui nous sera utile dans le suite. Comme g est différentiable en x_0, il existe V voisinage de 0 et $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ une fonction de limite nulle en $0_{\mathbb{R}^n}$ tels que pour tout $h \in V$, $g(x_0 + h) = g(x_0) + \langle \nabla g(x_0),\, h\rangle + \|h\|_2\, \varepsilon(h)$.

   ($\subset$) Soit $h \in T_C(x_0)$, alors il existe $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^n$ convergeant vers h et $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$ convergeant vers 0 tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_0 + t_k h_k \in C$ i.e. $g(x_0 + t_k h_k) \leqslant 0$. Comme $(t_k h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $0_{\mathbb{R}^n}$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant k_0$, on a $t_k h_k \in V$ et donc
$$g(x_0 + t_k h_k) = g(x_0) + t_k \langle \nabla g(x_0),\, h_k\rangle + t_k \|h_k\|_2\, \varepsilon(t_k h_k).$$
   Comme $y_0 \notin C$, on a $x_0 = P_C(y_0) \in \partial C$ et donc $g(x_0) = 0$ (si $g(x_0) < 0$ par continuité de g, on montre que $x_0 \in \mathring{C}$ i.e. $x_0 \notin \partial C = \overline{C} \setminus \mathring{C} = C \setminus \mathring{C}$). Ainsi pour tout $k \geqslant k_0$, on a
$$g(x_0 + t_k h_k) \leqslant 0 \Leftrightarrow \langle \nabla g(x_0),\, h_k\rangle + \|h_k\|_2\, \varepsilon(t_k h_k) \leqslant 0,$$
   où on a simplifié par $t_k > 0$. En passant à la limite dans l'inégalité lorsque $k \to +\infty$, comme $\varepsilon(t_k h_k) \to 0$, on obtient $\langle \nabla g(x_0),\, h\rangle \leqslant 0$.

   ($\supset$) Soit $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle \nabla g(x_0),\, h\rangle < 0$. Montrons que h est une directement admissible à C en x_0 ce qui justifiera alors que $h \in T_C(x_0)$. On a vu précédemment que $g(x_0) = 0$, de plus il existe $t_0 > 0$ tel que pour tout $t \in]0, t_0[$, $th \in V$. On a donc $g(x_0 + th) = t\,(\langle \nabla g(x_0),\, h\rangle + \|h\|_2\, \varepsilon(th))$. Or $\|h\|_2\, \varepsilon(th) \to 0$ quand $t \to 0$ et comme $\langle \nabla g(x_0),\, h\rangle < 0$ il existe donc $t_1 \geqslant t_0$ tel que pour tout $t \in]0, t_1[$, $\|h\|_2\, \varepsilon(th) < -\langle \nabla g(x_0),\, h\rangle$, d'où $g(x_0 + th) < 0$. Ainsi pour tout $t \in [0, t_1[$, $x_0 + th \in C$ et donc h est une directement admissible à C.

1. Si ∇g ne s'annule pas sur ∂C, alors ∂C est une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - 1$ dont l'espace tangent en tout point $x \in \partial C$ est un hyperplan affine dont la normale à la direction est $\nabla g(x)$. Cf par exemple "Petit guide du calcul différentiel..." de Rouvière.

On a ainsi montré que $\{h \in \mathbb{R}^n \,/\, \langle \nabla g(x_0),\, h\rangle < 0\} \subset T_C(x_0)$. Comme $T_C(x_0)$ est fermé, on a

$$\overline{\{h \in \mathbb{R}^n \,/\, \langle \nabla g(x_0),\, h\rangle < 0\}} \subset T_C(x_0),$$

i.e.

$$\{h \in \mathbb{R}^n \,/\, \langle \nabla g(x_0),\, h\rangle \leqslant 0\} \subset T_C(x_0).$$

4. On a $T_C(x_0) = \{h \in \mathbb{R}^n \,/\, \langle \nabla g(x_0),\, h\rangle \leqslant 0\}$, donc

$$P := \{h \in \mathbb{R}^n \,/\, \langle \nabla g(x_0),\, h\rangle = 0\} \subset T_C(x_0).$$

D'où $T_C(x_0)^* \subset P^*$. On vérifie facilement que $P^* = \mathrm{Vect}(\nabla g(x_0))$ en utilisant le fait que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\lambda \leqslant 0$, alors pour tout $h \in T_C(x_0) = \{h \in \mathbb{R}^n \,/\, \langle \nabla g(x_0),\, h\rangle \leqslant 0\}$, on a $\langle \lambda g(x_0),\, h\rangle = \lambda \underbrace{\langle g(x_0),\, h\rangle}_{\leqslant 0} \geqslant 0$.

D'où $\lambda \nabla g(x_0) \in T_C(x_0)^*$. Donc $\mathbb{R}_- \nabla g(x_0) \subset T_C(x_0)^* \subset \mathbb{R}\nabla g(x_0)$.

Soit $\lambda > 0$, alors pour tout $h \in T_C(x_0)$, on a $\langle \lambda g(x_0),\, h\rangle = \lambda \underbrace{\langle g(x_0),\, h\rangle}_{\leqslant 0} \leqslant 0$. D'où $\lambda \nabla g(x_0) \notin T_C(x_0)^*$.

Donc $T_C(x_0)^* \subset \mathbb{R}_- \nabla g(x_0)$. D'où $T_C(x_0)^* = \mathbb{R}_- \nabla g(x_0)$.

Or comme x_0 est l'unique élément de C minimisant $F : x \mapsto \|x - y_0\|_2^2$ sur C, on a par condition d'optimalité d'ordre 1 : $\nabla F(x_0) = x_0 - y_0 \in T_C(x_0)^*$, d'où il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $y_0 = x_0 + \lambda \nabla g(x_0)$. On ne peut avoir $\lambda = 0$ car sinon $y_0 = x_0 \in C$.

Exercice 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. On définit

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, x^T A x \leqslant 1\}.$$

1. Montrer que C est un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$. Si A est une homothétie (i.e. $A = \lambda I$), que représente géométriquement l'ensemble C ?

2. Montrer que pour une base orthonormée $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ convenable, il existe des coefficients strictement positifs $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ tels que

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i e_i \,/\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 \leqslant 1 \right\}.$$

Que représente géométriquement l'ensemble C ?

3. Montrer que pour tout vecteur $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n \setminus C$, il existe un unique $\lambda > 0$ (noté par la suite $\lambda(x)$) tel que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{x_i^2}{(1+\lambda\alpha_i)^2} = 1.$$

4. Montrer que la projection de $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$ sur C est donnée par

$$P_C(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1+\lambda(x)\alpha_i} e_i.$$

<u>Correction</u>.

1. Soit $g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto x^T A x - 1 = \langle Ax,\, x\rangle - 1$. Alors g est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\nabla^2 g(x) = 2A \succ 0$. D'où g est strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi par continuité de g, on a $C = g^{-1}(]-\infty, 0])$ fermé, et par convexité de g, C est convexe (comme ensemble de sous niveau).

2. A étant symétrique définie positive, A est diagonalisable dans une base orthonormée. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une telle BON et notons $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ la famille de valeurs propres associées (famille de réels strictement positifs puisque $A \succ 0$). Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, avec $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ et

$$x^T A x = \langle Ax,\, x\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i e_i,\, \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2,$$

la dernière égalité étant vraie grâce aux propriétés d'orthonormalités de la base $\mathcal{B}$.

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a $x \in C$ si et seulement si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ avec $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 \leqslant 1$.

L'ensemble C est un ellipsoïde.

3. Posons $f : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{x_i^2}{(1+t\alpha_i)^2}$. Alors f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, $f(0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 > 1$ car $x \notin C$ et $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda > 0$ tel que $f(\lambda) = 1$. En dérivant f, on montre que $f' < 0$ sur $\mathbb{R}_+$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi λ est unique.
4. D'après ce qui précède, on a pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n$, $g(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 - 1$ et $C = g^{-1}] - \infty, 0]$). On déduit en particulier que $\nabla g(x) = 2(\alpha_i x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et donc $\nabla g(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ si et seulement si $x = 0$.

   Soit $x \notin C$. La fonction g étant différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et C convexe fermé, on déduit d'après l'Exercice 4 que soit $\nabla g(P_C(x)) = 0$, soit il existe $\mu > 0$ tel que $x = P_C(x)+\mu\nabla g(P_C(x))$. Or comme $x \notin C$, on a $P_C(x) \in \partial C$, et puisque $0_{\mathbb{R}^n} \in \overset{\circ}{C}$ on déduit que $P_C(x) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Par conséquent $\nabla g(P_C(x)) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, donc finalement il existe $\mu > 0$ tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i = (P_C(x))_i + 2\mu\alpha_i(P_C(x))_i$, d'où $(P_C(x))_i = \frac{x_i}{1+2\mu\alpha_i}$ i.e.

$$P_C(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 + 2\mu\alpha_i} e_i.$$

   Enfin comme $P_C(x) \in \partial C$, on a $\sum_{i=1}^n \alpha_i \left((P_C(x))_i\right)^2 = 1$ i.e. $\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{x_i^2}{(1+2\mu\alpha_i)^2} = 1$. D'après la question 3., on a donc par identification $2\mu = \lambda(x)$, d'où

$$P_C(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 + \lambda(x)\alpha_i} e_i.$$