Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

M1 MMA 2023-2024
Optimisation Sous-Contraintes

Feuille de TD n°2

Cônes, projection.

Exercice 1

Soient S un ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Dans les exemples listés ci-dessous, dessiner l'ensemble des vecteurs admissibles en x à S, ainsi que les cônes tangent et normal correspondants.

1. $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$, $x = (0, 0)$,
2. $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, -x_1 \leqslant 0,\, -x_2 \leqslant 0,\, x_1 x_2 \leqslant 0\}$, $x = (0, 0)$,
3. $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, -x_1^3 + x_2 \leqslant 0,\, x_1^5 - x_2 \leqslant 0,\, -x_2 \leqslant 0\}$, $x = (0, 0)$,
4. $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1\}$, $x = (0, 0)$.

Exercice 2

Soit C un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$.

1. Prouver l'existence et l'unicité de la projection de $x \in \mathbb{R}^n$ sur C par des arguments généraux d'optimisation du chapitre 1.
2. Prouver la caractérisation du projeté par des arguments généraux d'optimisation du chapitre 2.

Exercice 3

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $C \subset F$ un ensemble convexe fermé non vide.

1. Montrer que $P_C = P_C \circ P_F$.

   On considère dans la suite l'ensemble
$$C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1 \text{ et } x_3 = 0\}.$$
2. Quelle est la forme géométrique de C ? Montrer que C est un convexe fermé de $\mathbb{R}^3$.
3. Expliciter l'application P_C.

Exercice 4

Soit $g : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur Ω ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. On considère $C = \{g \leqslant 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, g(x) \leqslant 0\}$ qui est supposé convexe et non vide.

Soit $y_0 \notin C$. L'objectif est de démontrer que si $x_0 = P_C(y_0)$ alors x_0 satisfait l'une des deux propositions

— $\nabla g(x_0) = 0$,

— $\exists \lambda > 0,\, y_0 = x_0 + \lambda \nabla g(x_0)$.

1. Justifier que x_0 est bien défini.

   On suppose dans la suite que $\nabla g(x_0) \neq 0$.
2. Proposer une heuristique géométrique justifiant la deuxième condition.
3. Montrer que $T_C(x_0) = \{h \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle \nabla g(x_0), h \rangle \leqslant 0\}$. *Indication : on pourra raisonner par double inclusion.*
4. Déterminer $(T_C(x_0))^\star$ et en déduire la deuxième assertion.

Exercice 5
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. On définit
$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x^T Ax \leqslant 1\}.$$

1. Montrer que C est un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$. Si A est une homothétie (i.e. $A = \lambda I$), que représente géométriquement l'ensemble C ?
2. Montrer que pour une base orthonormée $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ convenable, il existe des coefficients strictement positifs $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ tels que
$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,|\, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 \leqslant 1 \right\}.$$
Que représente géométriquement l'ensemble C ?
3. Montrer que pour tout vecteur $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n \setminus C$, il existe un unique $\lambda > 0$ (noté par la suite $\lambda(x)$) tel que
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{x_i^2}{(1 + \lambda \alpha_i)^2} = 1.$$
4. Montrer que la projection de $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$ sur C est donnée par
$$P_C(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 + \lambda(x)\alpha_i} e_i.$$

Exercice 6
Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on écrira $x \succeq 0$ pour signifier que $x_i \geqslant 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, et on notera $I(x) = \{i \in \{1, \ldots, n\} \,|\, x_i = 0\}$. On pose $S = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x \succeq 0\} = (\mathbb{R}_+)^n$.

On se donne une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $x \notin S$, que dire de $T_S(x)$?
2. Soit $x \in S$. Montrer que $T_S(x) = \{h \in \mathbb{R}^n \,|\, \forall i \in I(x),\, h_i \geqslant 0\}$.
3. En déduire qu'un minimum local $x^\star$ de f sur S satisfait
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \begin{cases} (\nabla f(x^\star))_i = 0, & \text{si } i \notin I(x^\star) \\ (\nabla f(x^\star))_i \geqslant 0, & \text{si } i \in I(x^\star). \end{cases}$$
4. Sous quelle hypothèse sur f cette dernière condition devient-elle suffisante pour que $x^\star$ soit un minimiseur (global) de f sur S ?