Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

M1 MMA 2024-2025
Optimisation Sous-Contraintes

Feuille de TD n°1

Généralités.

Notations transversales à ce TD.

Soit $n, m, p \in \mathbb{N}^*$. On considère pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, des fonctions $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. De plus on pose

$$S = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \,/\, f_i(x) \leqslant 0,\, i \in \{1, \ldots, m\} \text{ et } h_j(x) = 0,\, j \in \{1, \ldots, p\}\Big\}. \tag{1}$$

Exercice 4

1. Montrer que si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe, alors $C_-(g) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) \leqslant 0\}$ est convexe.
2. Montrer que si $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est affine, alors $C_0(h) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ h(x) = 0\}$ est convexe. Exhiber un exemple de fonction h convexe telle que $C_0(h)$ n'est pas convexe, dans $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que toute intersection d'ensembles convexes est convexe.
4. En déduire que si les fonctions f_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ sont convexes et les fonctions $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$ sont affines, alors l'ensemble S défini par (1) est convexe.

Correction.

1. L'ensemble $C_-(g)$ est appelé *un ensemble de sous-niveau de g*. Soient $x, x' \in C_-(g)$ et $t \in [0, 1]$. Ainsi $g(x) \leqslant 0$ et $g(x') \leqslant 0$. Et comme g est convexe, on a $g((1-t)x + tx') \leqslant (1-t)g(x) + tg(x') \leqslant 0$. D'où $(1-t)x + tx' \in C_-(g)$ et donc $C_-(g)$ est convexe.

   On montre plus généralement que tout ensemble de sous-niveau d'une fonction convexe est convexe.
2. Par contre la convexité d'un ensemble de niveau n'est plus assurée quand la fonction est seulement convexe (penser par exemple à la fonction convexe $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \|x\|_2$ dont les ensembles de niveau sont des cercles (quand ils ne sont pas vides).

   Comme h est affine, il existe $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $h : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle a,\, x\rangle + b$. Soient $x, x' \in C_0(h)$ et $t \in [0, 1]$. Ainsi $h(x) = h(x') = 0$. Et donc $h((1-t)x + tx') = \langle a,\, (1-t)x + tx'\rangle + b = (1-t)(\langle a,\, x\rangle + b) + t(\langle a,\, x'\rangle + b) = (1-t)h(x) + th(x') = 0$. D'où $(1-t)x + tx' \in C_0(h)$ et par conséquent $C_0(h)$ est convexe.
3. Il est sous entendu ici que les ensembles considérés sont des parties de $\mathbb{R}^n$. Soit I un ensemble (qui peut être fini, dénombrable ou indénombrable) et considérons une famille $(C_i)_{i \in I}$ où pour tout $i \in I$, C_i est un sous ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$. Il s'agit de montrer que $C = \cap_{i \in I} C_i$ est également convexe.

   Soient $x, x' \in C$ et $t \in [0, 1]$. Alors pour tout $i \in I$, $(x, x') \in C_i^2$, donc par convexité de C_i, $(1-t)x + tx' \in C_i$. D'où on a bien $(1-t)x + tx' \in C$ et donc C est convexe.
4. On a $S = \cap_{i=1}^m C_-(f_i) \cap \cap_{j=1}^p C_0(h_j)$. D'après les précédentes questions, on déduit bien que S est convexe comme intersection de convexes puisque
   - pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $C_-(f_i)$ est convexe car f_i est convexe,
   - pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, $C_0(h_j)$ est convexe car h_j est affine.