Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

M1 MMA 2023-2024
Optimisation Sous-Contraintes

Feuille de TD n°1

Généralités.

Pour $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ et $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$, on considère

$$S = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n / f_i(x) \leqslant 0,\ i \in \{1, \dots, m\} \text{ et } h_j(x) = 0,\ j \in \{1, \dots, p\} \Big\} \tag{1}$$

Exercice 1

1. Montrer que si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe, alors $C_-(g) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) \leqslant 0\}$ est convexe.
2. Montrer que si $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est affine, alors $C_0(h) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ h(x) = 0\}$ est convexe. Exhiber un exemple de fonction h convexe telle que $C_0(h)$ n'est pas convexe, dans $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que toute intersection d'ensembles convexes est convexe.
4. En déduire que si les fonctions f_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ sont convexes et les fonctions $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$ sont affines, alors l'ensemble S défini par (1) est convexe.

Exercice 2

Reconnaître "géométriquement" les ensembles décrits par (1), associés aux fonctions suivantes.

1. $n = 2,\ m = 1,\ p = 1,\ f_1(x_1, x_2) = x_1,\ h_1(x_1, x_2) = x_2$.
2. $n = 2,\ m = 2,\ p = 0,\ f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4,\ f_2(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2$.
3. $n = 3,\ m = 1,\ p = 1,\ f_1(x_1, x_2, x_3) = -x_3,\ h_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$.
4. $m = n,\ p = 1,\ f_j(x) = -x_j,\ h_1(x) = \sum_{k=1}^n x_k - 1$, où $x = (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$.

Exercice 3

1. Pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on note
$$C_0(f) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = 0\} \qquad \text{et} \qquad C_-(f) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \leqslant 0\}.$$
   a) Donner $C_0(f^2 + g^2)$ en fonction de $C_0(f)$ et $C_0(g)$, $C_0(f \cdot g)$ en fonction de $C_0(f)$ et $C_0(g)$.
   b) Donner $C_-(\max(f, g))$ en fonction de $C_-(f)$ et $C_-(g)$, $C_-(\min(f, g))$ en fonction de $C_-(f)$ et $C_-(g)$.
   c) Pour $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on définit g_+ par $g_+ = \max(0, g)$. Exprimer $C_-(g)$ en fonction de $C_0(g_+)$.
2. On considère l'ensemble S défini par (1). Montrer que l'on peut construire à partir de ces fonctions une fonction $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $S = \{x \in \mathbb{R}^n,\ h(x) = 0\}$.

Exercice 4

Dans chaque cas ci-dessous, proposer un jeu de fonctions f_i et de fonctions h_j dans (1), conduisant à la forme géométrique demandée.

1. en dimension 2 : un segment, un demi-cercle, un triangle plein, le bord d'un triangle plein.
2. en dimension 3 : un disque, une demi-boule, une "boîte de conserve" pleine (cylindre tronqué) à fond circulaire
3. en dimension n, l'ensemble des suites finies réelles croissantes, l'ensemble des mesures de probabilité.

Exercice 5

Pour chacun des problèmes de minimisation sous contrainte ci-dessous, discuter du caractère bien posé du problème, et le cas échéant, de l'unicité des solutions.

1. $n = 1,\ f(x) = e^{-x},\ C = \mathbb{R}_+$
2. $n = 1,\ f(x) = x^2,\ m = 1,\ p = 0,\ f_1(x) = -|x| + 1$
3. $n = 2,\ f(x_1, x_2) = \sin(x_1 x_2),\ m = 1,\ p = 1,\ f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1,\ h_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 3$
4. $n = 3,\ f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2,\ m = 1,\ p = 1,\ f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 1,\ h_1(x_1, x_2, x_3) = x_3,$
5. (excursion en dimension infinie) $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x_n|}{n+1}$, $C = \{x \in \ell^2,\ \|x\| = 1\}$, où $\|\cdot\|$ est la norme usuelle de ℓ^2.

Exercice 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, $b \in \mathbb{R}^n$, et la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax,\, x\rangle - \langle b,\, x\rangle\,.$$

1. Calculer la différentielle de f, puis sa différentielle seconde.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et b pour que f soit convexe.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et b pour que f soit strictement convexe.
4. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et b pour que f soit α-fortement convexe.
5. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et b pour que f soit M-lipschitzienne.
6. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et b pour que ∇f soit L-lipschitzienne.

Exercice 7

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et que g est convexe sur $\mathbb{R}^n$. Soit C un sous-ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^n$, et $x \in C$. On considère les deux propriétés suivantes

(i) $f + g$ admet un minimum en x sur C.

(ii) Pour tout $y \in C$,

$$\langle \nabla f(x),\, y - x\rangle + g(y) - g(x) \geqslant 0.$$

1. Montrer que (i) implique (ii).
2. On suppose de plus que f est convexe. Montrer que (i) et (ii) sont équivalents.

Exercice 8 (Méthode de pénalisation extérieure)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue, coercive et strictement convexe. On considère $C = \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) \leqslant 0\}$, où $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe continue, et on suppose que C est non vide. On note $x^\star$ le minimum de f sur C. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f_k(x) = f(x) + k\alpha(x), \qquad \text{avec } \alpha(x) = (\max(g(x), 0))^2.$$

1. Montrer que pour chaque $k \in \mathbb{N}$, f_k admet un unique minimum sur $\mathbb{R}^n$, que l'on note x_k.
2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ f(x_k) \leqslant f(x^\star)$, puis que la suite (x_k) est bornée. On note $\tilde{x}$ une valeur d'adhérence de cette suite.
3. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \alpha(x_k) \leqslant \frac{1}{k}(f(x^\star) - f(x_k))$ et en déduire que $\tilde{x} \in C$.
4. Montrer que $\tilde{x} = x^\star$ puis que (x_k) converge vers $x^\star$.