Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

M1 MMA 2024-2025
OPTIMISATION SOUS-CONTRAINTES

Feuille de TD n°1

Généralités.

Notations transversales à ce TD.

Soit $n, m, p \in \mathbb{N}^*$. On considère pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et tout $j \in \{1, \dots, p\}$, des fonctions $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. De plus on pose

$$S = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \,/\, f_i(x) \leqslant 0,\ i \in \{1, \dots, m\} \text{ et } h_j(x) = 0,\ j \in \{1, \dots, p\}\Big\}. \tag{1}$$

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, $b \in \mathbb{R}^n$, et la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax,\, x\rangle - \langle b,\, x\rangle\,.$$

1. Justifier la régularité de f, puis déterminer sa différentielle, son gradient, sa différentielle seconde et sa hessienne.
2. Soit $m > 0$, $M, L \in \mathbb{R}_+$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et b pour que :
   a) f soit convexe,
   b) f soit strictement convexe,
   c) f soit m-fortement convexe,
   d) f soit M-lipschitzienne,
   e) ∇f soit L-lipschitzienne.

Exercice 2

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et que g est convexe sur $\mathbb{R}^n$. Soit C un sous-ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^n$, et $x \in C$. On considère les deux propriétés suivantes

(1) $f + g$ admet un minimum en x sur C,

(2) pour tout $y \in C$,

$$\langle \nabla f(x),\, y - x\rangle + g(y) - g(x) \geqslant 0.$$

1. Montrer que (1) implique (2).
2. On suppose de plus que f est convexe. Montrer que (2) et (1) sont équivalents.

Exercice 3 (Minimisation d'une fonction quadratique sur une droite)

Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x) = \frac{1}{2}\|x - \alpha\|_2^2$. On considère de plus l'ensemble $C = \{(t, 0) \,/\, t \in \mathbb{R}\}$.

1. Représenter des lignes de niveau de f.
2. Montrer que le problème d'optimisation $\inf_C f$ est bien posé.
3. Montrer que f admet un unique minimum global sur C et l'identifier. *Indication : on pourra s'aider d'intuitions géométriques.*

Exercice 4

1. Montrer que si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe, alors $C_-(g) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) \leqslant 0\}$ est convexe.
2. Montrer que si $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est affine, alors $C_0(h) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ h(x) = 0\}$ est convexe. Exhiber un exemple de fonction h convexe telle que $C_0(h)$ n'est pas convexe, dans $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que toute intersection d'ensembles convexes est convexe.
4. En déduire que si les fonctions f_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ sont convexes et les fonctions $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$ sont affines, alors l'ensemble S défini par (1) est convexe.

Exercice 5
Reconnaître “géométriquement” les ensembles décrits par (1), associés aux fonctions suivantes.

1. $n = 2$, $m = 1$, $p = 1$, $f_1 : (x_1, x_2) \mapsto x_1$, $h_1 : (x_1, x_2) \mapsto x_2$.
2. $n = 2$, $m = 2$, $p = 0$, $f_1 : (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2 - 4$, $f_2 : (x_1, x_2) \mapsto 1 - x_1^2 - x_2^2$.
3. $n = 3$, $m = 1$, $p = 1$, $f_1 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto -x_3$, $h_1 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$.
4. $m = n$, $p = 1$, $f_i : x \mapsto -x_i$, $h_1 : x \mapsto \sum_{k=1}^n x_k - 1$, où $x = (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$.

Exercice 6

1. Pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on note
$$C_0(f) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = 0\} \qquad \text{et} \qquad C_-(f) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \leqslant 0\}.$$
   a) Donner $C_0(f^2 + g^2)$ en fonction de $C_0(f)$ et $C_0(g)$, $C_0(f \cdot g)$ en fonction de $C_0(f)$ et $C_0(g)$.
   b) Donner $C_-(\max(f, g))$ en fonction de $C_-(f)$ et $C_-(g)$, $C_-(\min(f, g))$ en fonction de $C_-(f)$ et $C_-(g)$.
   c) Pour $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on définit g_+ par $g_+ = \max(0, g)$. Exprimer $C_-(g)$ en fonction de $C_0(g_+)$.
2. On considère l’ensemble S défini par (1). Montrer que l’on peut construire à partir de ces fonctions une fonction $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $S = \{x \in \mathbb{R}^n,\ h(x) = 0\}$.

Exercice 7
Dans chaque cas ci-dessous, proposer un jeu de fonctions f_i et de fonctions h_j dans (1), conduisant à la forme géométrique demandée.

1. En dimension 2 : un segment, un demi-cercle, un triangle plein, le bord d’un triangle plein.
2. En dimension 3 : un disque, une demi-boule, une "boîte de conserve" pleine (cylindre tronqué) à fond circulaire
3. En dimension n, l’ensemble des suites finies réelles croissantes, l’ensemble des mesures de probabilité.

Exercice 8
Pour chacun des problèmes de minimisation sous contrainte ci-dessous, discuter du caractère bien posé du problème, et le cas échéant, de l’unicité des solutions.

1. $n = 1$, $f : x \mapsto e^{-x}$, $C = \mathbb{R}_+$.
2. $n = 1$, $f : x \mapsto x^2$, $m = 1$, $p = 0$, $f_1 : x \mapsto -|x| + 1$.
3. $n = 2$, $f : (x_1, x_2) \mapsto \sin(x_1 x_2)$, $m = 1$, $p = 1$, $f_1 : (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2 - 1$, $h_1 : (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2 - 3$.
4. $n = 3$, $f : (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + 2x_2^2$, $m = 1$, $p = 1$, $f_1 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + x_2^2 - 1$, $h_1 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_3$.
5. (Excursion en dimension infinie) $f : x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x_n|}{n+1}$, $C = \{x \in \ell^2(\mathbb{N}) \,/\, \|x\| = 1\}$, où $\|\cdot\|$ est la norme de $\ell^2(\mathbb{N})$.

Exercice 9 (Méthode de pénalisation extérieure)
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue, coercive et strictement convexe. On considère $C = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, g(x) \leqslant 0\}$, où $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe continue, et on suppose que C est non vide. On note $x^\star$ le minimum de f sur C. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f_k(x) = f(x) + k\alpha(x), \qquad \text{avec } \alpha(x) = (\max(g(x), 0))^2.$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k admet un unique minimum sur $\mathbb{R}^n$, que l’on note x_k.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(x_k) \leqslant f(x^\star)$, puis que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée. On note $\tilde{x}$ une valeur d’adhérence de cette suite.
3. Montrer que que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha(x_k) \leqslant \frac{1}{k}(f(x^\star) - f(x_k))$ et en déduire que $\tilde{x} \in C$.
4. Montrer que $\tilde{x} = x^\star$, puis que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $x^\star$.

Exercice 10 (Interrogation no1 23/24)
Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que L est symétrique définie positive.

On considère la relation d'ordre (partielle) sur $\mathbb{R}^m$ [1] suivante

$$\forall y, y' \in \mathbb{R}^m, \quad y \preceq y' \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\},\ y_i \leqslant y'_i.$$

On fixe $y_0 \in \mathbb{R}^m$ tel que $y_0 \in \mathrm{Im}(A)$ et on s'intéresse au problème d'optimisation suivant

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf_{x \in S} \|Lx\|_2^2 .$$

où $S = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ Ax \preceq y_0\}$.

1. Montrer que le problème $(\mathcal{P})$ est bien posé.
2. Montrer que S est convexe.
3. Le problème $(\mathcal{P})$ admet-il une unique solution ?
4. On suppose dans cette question que $n = 2$, $m = 3$, puis

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y_0 = (1, 1, 1).$$

L est toujours une matrice symétrique définie positive quelconque (mais ici de taille 2×2).

a) Représenter l'ensemble S ainsi que ses éventuels points extrêmes. *Aucune justification n'est attendue.*

b) Donner l'ensemble des solutions de $(\mathcal{P})$.

1. Cette relation d'ordre est appelée *ordre produit*.