Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Master 1ère année, MMA, 2023-2024
Optimisation

Rattrapage du 20/06/2024

Durée 1h30. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.

> La correction mériterait globalement plus de détails qui ne sont pas fournis par manque de temps. L'exercice 1 était très classique et des compléments peuvent être trouvés dans les précédents examens et feuilles de TD.

Exercice 1 (10pt)

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. On définit pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ la fonction

$$F(x) = \frac{1}{2} \|Hx - y\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|Lx\|_2^2,$$

où $H \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ avec L inversible, $y \in \mathbb{R}^m$ et $\lambda > 0$.

1. Montrer que $L^T L$ est une matrice symétrique définie positive.
2. En déduire qu'il existe $\mu > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|Lx\|_2^2 \geqslant \mu \|x\|_2^2$. Puis que F est coercive.
3. Montrer que F admet au moins un minimum global.
4. Justifier que F est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
5. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla F(x)$.
6. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla^2 F(x)$.
7. Montrer que F est strictement convexe.
8. Montrer que F admet un unique minimum global.
9. Justifier que les hypothèses du théorème de convergence de l'algorithme de descente de gradient par rebroussement d'Armijo sont satisfaites.

Correction.

$10 = 1 + 2 + 0.75 + 0.25 + 0.75 + 0.75 + 1 + 0.5 + 3$

1. On a $(L^T L)^T = L^T L$ donc $L^T L$ est symétrique. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle L^T Lx, x\rangle = 0$. Alors $\|Lx\|_2^2 = 0$ donc $x = 0$ comme L est inversible. Ainsi $\langle L^T Lx, x\rangle > 0$ sauf si $x = 0$. Donc $L^T L$ est bien symétrique définie positive.
2. Comme $L^T L$ est symétrique définie positive, elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et toutes ses valeurs propres sont strictement positives. Notons $\mu > 0$ la plus petite. Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres et $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ les valeurs propres associées pour $L^T L$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $x = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i\rangle v_i$ et $\|Lx\|_2^2 = \langle L^T Lx, x\rangle = \sum_{i=1}^n \mu_i \langle x, v_i\rangle^2 \geqslant \mu \sum_{i=1}^n \langle x, v_i\rangle^2 = \mu \|x\|_2^2$.

   On a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $F(x) \geqslant \underbrace{\frac{1}{2}\lambda\mu}_{>0} \|x\|_2^2 \to +\infty$ quand $\|x\|_2 \to +\infty$. Donc F est bien coercive.
3. F est continue et coercive sur $\mathbb{R}^n$ donc admet au moins un minimum global sur $\mathbb{R}^n$.
4. F est $\mathcal{C}^2$ par composée et somme de fonctions $\mathcal{C}^2$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\nabla F(x) = H^T(Hx - y) + \lambda L^T Lx$.
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\nabla^2 F(x) = H^T H + \lambda L^T L$.
7. $H^T H$ est symétrique positive. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla^2 F(x) \geqslant \lambda L^T L > 0$. Donc F est strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$.
8. F admet un minimum global et comme F strictement convexe, il est unique.
9. F est bien convexe sur $\mathbb{R}^n$. Soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Alors $C = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, f(x) \leqslant f(x^{(0)})\}$ est compact car fermé et borné par coercivité de F. On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla^2 F(x) \geqslant \lambda L^T L \geqslant \lambda\mu I_n$. Donc c'est en particulier également vrai sur C. Pour l'autre inégalité, c'est par continuité de $x \mapsto \nabla^2 F(x)$ et des valeurs propres en fonction des coefficients d'une matrice, en utilisant le fait que C est compact.

Exercice 2 (14pt)
On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Partie I : questions préliminaires. (6pt).

On dira qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+^*$ est logarithmiquement-convexe (ou log-convexe) sur $\mathbb{R}^n$ si $g = \log \circ f$ est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

1. a) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, convexe et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que $h \circ g$ est convexe.

   b) En déduire que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+^*$ est log-convexe, alors f est convexe.

   c) La réciproque est-elle vraie ?

2. On suppose que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+^*$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$. On pose $g = \log \circ f$.

   a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\nabla g(x) = \frac{1}{f(x)} \nabla f(x),$$

   puis en déduire $\nabla^2 g(x)$.

   b) Montrer que f est log-convexe si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x)\nabla^2 f(x) \succeq \nabla f(x) \nabla f(x)^T.$$

<u>Correction</u>.
$6 = (1 + 1 + 0.75) + (2.5 + 0.75)$

1. a) Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0, 1]$, alors par convexité de g on a : $g((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)g(x) + tg(y)$. Donc par croissance de h, on a : $h \circ g((1-t)x + ty) \leqslant h((1-t)g(x) + tg(y))$. Puis par convexité de h, on obtient finalement que $h \circ g((1-t)x + ty) \leqslant h((1-t)g(x) + tg(y)) \leqslant (1-t)h \circ g(x) + th \circ g(y)$. D'où $h \circ g$ est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

   b) Puisque $\log \circ f$ est convexe sur $\mathbb{R}^n$ (par hypothèse de log-convexité sur f) et exp est croissante et convexe définie sur $\mathbb{R}$, on déduit d'après la précédente questions que $\exp \circ (\log \circ f) = f$ est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

   c) La fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. Mais $\log \circ f = 2 \log$ qui est strictement concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent la réciproque est fausse.

2. a) f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ (à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$) et log est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composée de fonctions $\mathcal{C}^2$, on déduit que $g = \log \circ f$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^n$, on a $\mathrm{d}g(x)(u) = \frac{1}{f(x)} \mathrm{d}f(x)(u)$ par application de la formule de la différentielle d'une composée. Ainsi

$$\nabla g(x) = \frac{1}{f(x)} \nabla f(x),$$

   Puis pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, on obtient

$$\mathrm{d}^2 g(x)(u, v) = -\frac{1}{f(x)^2} \mathrm{d}f(x)(v) \mathrm{d}f(x)(u) + \frac{1}{f(x)} \mathrm{d}^2 f(x)(u, v),$$

   en différenciant d'expression de la différentielle par rapport à x et en appliquant de nouveau la formule de la différentielle d'une composée composée. D'où

$$\nabla^2 g(x) = -\frac{1}{f(x)^2} \nabla f(x) \nabla f(x)^T + \frac{1}{f(x)} \nabla^2 f(x).$$

   b) Ainsi f est log-convexe si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla^2 g(x) \succeq 0$ i.e. vu l'expression trouvée à la précédente question

$$f(x)\nabla^2 f(x) \succeq \nabla f(x) \nabla f(x)^T.$$

Partie II : étude d'un problème d'optimisation. (2.5pt).

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carré fixée dont au moins l'un des éléments diagonaux est non nul.

On considère le problème d'optimisation suivant

$$(\mathcal{P}_1) \qquad \inf_{x \in \mathbb{R}^n} F(x),$$

où $F : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \log\left(\sum_{i,j=1}^n m_{i,j}^2 e^{\langle \alpha_{i,j},\, x\rangle}\right)$ avec pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, $\alpha_{i,j} = e_i - e_j$.

3. a) Montrer que pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, $f_{i,j} : x \in \mathbb{R}^n \mapsto m_{i,j}^2 e^{\langle \alpha_{i,j},\, x\rangle}$ est log-convexe.

b) On admet que la somme de deux fonctions log-convexe sur $\mathbb{R}^n$ est également log-convexe sur $\mathbb{R}^n$. En déduire que F est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

4. Montrer que F est minorée par $\log\left(\sum_i^n m_{i,i}^2\right) > -\infty$.

Correction.
2.5 = (0.75 + 0.5) + 1.25

3. a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\log(f_{i,j}(x)) = 2\log(m_{i,j}) + \langle \alpha_{i,j},\, x\rangle$. Ainsi $\log \circ f_{i,j}$ est une fonction affine sur $\mathbb{R}^n$ donc convexe sur $\mathbb{R}^n$. D'où $f_{i,j}$ est log-convexe sur $\mathbb{R}^n$.

b) On sait que la somme de fonctions log-convexe est log-convexe, donc $\sum_{i,j=1}^n f_{i,j}$ est log-convexe sur $\mathbb{R}^n$, d'où F est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

4. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i,j=1}^n m_{i,j}^2 e^{\langle \alpha_{i,j},\, x\rangle} \geqslant \sum_{i=1}^n m_{i,i}^2 e^{\left\langle \underbrace{\alpha_{i,i}}_{=0},\, x\right\rangle} = \sum_{i=1}^n m_{i,i}^2 > 0$ car au moins l'un des éléments diagonaux de M est non nul. Comme log est croissante, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $G(x) \geqslant \log(\sum_{i=1}^n m_{i,i}^2) > -\infty$.

Partie III : résolution de $(\mathcal{P}_1)$. (5.5pt).

Dans la suite on note pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, $\operatorname{sign}(t) = \frac{|t|}{t}$ le signe du réel t (valant donc 1 si t est strictement positif, -1 si t est strictement négatif).

5. On considère le problème

$$(\mathcal{P}_2) \qquad \inf_{x \in S} \langle v,\, x\rangle\,,$$

où $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est fixé et $S = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x\|_1 \leqslant 1\}$.

a) Montrer par des arguments théoriques que le problème $(\mathcal{P}_2)$ admet un minimum global.

b) On rappelle l'inégalité de Hölder

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad -\|y\|_\infty \|x\|_1 \leqslant \langle y,\, x\rangle \leqslant \|y\|_\infty \|x\|_1\,.$$

Soit $k_0 \in \{1,\dots,n\}$ tel que $|v_{k_0}| = \|v\|_\infty = \max_{k \in \{1,\dots,n\}} |v_k|$. Montrer que $-\operatorname{sign}(v_{k_0}) e_{k_0}$ est solution de $(\mathcal{P}_2)$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla F(x) = (\partial_1 F(x), \dots, \partial_n F(x)) \neq 0$. Posons $d = -\operatorname{sign}(\partial_{k_0} F(x)) e_{k_0}$ où $k_0 \in \{1,\dots,n\}$ est tel que $|\partial_{k_0} F(x)| = \|\nabla F(x)\|_\infty$. Ainsi d est donc une solution de $(\mathcal{P}_2)$ pour $v = \nabla F(x)$, d'après ce qui précède.

Montrer que d est une direction de descente pour F en x.

On appellera cette direction, la direction de descente de plus forte pente pour la norme ℓ_1.

7. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Définir par récurrence la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ démarrant en x_0 et correspondant à la méthode de descente dont la direction de descente est celle de plus forte pente pour la norme ℓ_1 et dont le pas est optimal.

Correction.
5.5 = (0.75 + 1.75) + 1 + 2

5. a) L'ensemble S est compact et la fonction objectif $x \mapsto \langle v, x\rangle$ est continue sur $\mathbb{R}^n$. Donc $(\mathcal{P}_2)$ admet au moins un minimum global.

   b) Par l'inégalité de Hölder on déduit que la valeur minimale de $x \mapsto \langle v, x\rangle$ sur S est minorée par $-\|y\|_\infty$. Or $-\text{sign}(v_{k_0})e_{k_0} \in S$ et $\langle v, -\text{sign}(v_{k_0})e_{k_0}\rangle = -\|y\|_\infty$. D'où $-\text{sign}(v_{k_0})e_{k_0}$ est bien une solution du problème $(\mathcal{P}_2)$.

6. On a $\langle \nabla F(x), d\rangle = -\|\nabla F(x)\|_\infty < 0$ car $\nabla F(x) \neq 0$. D'où d est bien une direction de descente pour F en x.

7. On a pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
&k_0 \in \text{argmax}_{k\in\{1,\dots,n\}} |\partial_k F(x_i)|,\\
&d_i = -\text{sign}(\partial_{k_0} F(x_i))e_{k_0},\\
&t_i \in \text{argmin}_{t\geqslant 0} F(x_i + td_i),\\
&x_{i+1} = x_i + t_i d_i.
\end{aligned}
$$

> Cette procédure continue tant que $\nabla F(x_i) \neq 0$, car si x_i satisfait $\nabla F(x_i) = 0$ cela signifie que x_i est un minimum global de F sur $\mathbb{R}^n$ par convexité de F.
> Notez que la recherche de t_i est simple, car comme $d_i = -\text{sign}(\partial_{k_0} F(x_i))e_{k_0}$ c'est un problème unidimensionnelle dont on peut trouver une formule littérale pour l'unique solution.
> Cette algorithme de descente est donc particulièrement simple à mettre en oeuvre. Il revient à minimiser F composante par composante (en sélectionnant à chaque fois la composante dont la dérivée partielle de F est la plus grande en valeur absolue). Voir `https://en.wikipedia.org/wiki/Coordinate_descent`.