

Master 1^{ère} année, MMA, 2023-2024
OPTIMISATION

Rattrapage du 20/06/2024

Durée 1h30. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 (10pt)

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. On définit pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ la fonction

$$F(x) = \frac{1}{2} \|Hx - y\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|Lx\|_2^2,$$

où $H \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ avec L inversible, $y \in \mathbb{R}^m$ et $\lambda > 0$.

1. Montrer que $L^T L$ est une matrice symétrique définie positive.
2. En déduire qu'il existe $\mu > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|Lx\|_2^2 \geq \mu \|x\|_2^2$. Puis que F est coercive.
3. Montrer que F admet au moins un minimum global.
4. Justifier que F est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
5. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla F(x)$.
6. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla^2 F(x)$.
7. Montrer que F est strictement convexe.
8. Montrer que F admet un unique minimum global.
9. Justifier que les hypothèses du théorème de convergence de l'algorithme de descente de gradient par rebroussement d'Armijo sont satisfaites.

Exercice 2 (14pt)

On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Partie I : questions préliminaires. (6pt).

On dira qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est logarithmiquement-convexe (ou log-convexe) sur $\mathbb{R}^n$ si $g = \log \circ f$ est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

1. a) Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante, convexe et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que $h \circ g$ est convexe.
b) En déduire que si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est log-convexe, alors f est convexe.
c) La réciproque est-elle vraie ?
2. On suppose que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$. On pose $g = \log \circ f$.
a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\nabla g(x) = \frac{1}{f(x)} \nabla f(x),$$

puis en déduire $\nabla^2 g(x)$.

- b) Montrer que f est log-convexe si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) \nabla^2 f(x) \succeq \nabla f(x) \nabla f(x)^T.$$

Partie II : étude d'un problème d'optimisation. (2.5pt).

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée fixée dont au moins l'un des éléments diagonaux est non nul.

On considère le problème d'optimisation suivant

$$(\mathcal{P}_1) \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^n} F(x),$$

où $F : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \log \left(\sum_{i,j=1}^n m_{i,j}^2 e^{\langle \alpha_{i,j}, x \rangle} \right)$ avec pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $\alpha_{i,j} = e_i - e_j$.

3. a) Montrer que pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $f_{i,j} : x \in \mathbb{R}^n \mapsto m_{i,j}^2 e^{\langle \alpha_{i,j}, x \rangle}$ est log-convexe.

b) On admet que la somme de deux fonctions log-convexe sur $\mathbb{R}^n$ est également log-convexe sur $\mathbb{R}^n$. En déduire que F est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

4. Montrer que F est minorée par $\log \left(\sum_i^n m_{i,i}^2 \right) > -\infty$.

Partie III : résolution de $(\mathcal{P}_1)$. (5.5pt).

Dans la suite on note pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, $\text{sign}(t) = \frac{|t|}{t}$ le signe du réel t (valant donc 1 si t est strictement positif, -1 si t est strictement négatif).

5. On considère le problème

$$(\mathcal{P}_2) \quad \inf_{x \in S} \langle v, x \rangle,$$

où $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est fixé et $S = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\|_1 \leq 1\}$.

a) Montrer par des arguments théoriques que le problème $(\mathcal{P}_2)$ admet un minimum global.

b) On rappelle l'inégalité de Hölder

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad -\|y\|_\infty \|x\|_1 \leq \langle y, x \rangle \leq \|y\|_\infty \|x\|_1.$$

Soit $k_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|v_{k_0}| = \|v\|_\infty = \max_{k \in \{1, \dots, n\}} |v_k|$. Montrer que $-\text{sign}(v_{k_0})e_{k_0}$ est solution de $(\mathcal{P}_2)$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla F(x) = (\partial_1 F(x), \dots, \partial_n F(x)) \neq 0$. Posons $d = -\text{sign}(\partial_{k_0} F(x))e_{k_0}$ où $k_0 \in \{1, \dots, n\}$ est tel que $|\partial_{k_0} F(x)| = \|\nabla F(x)\|_\infty$. Ainsi d est donc une solution de $(\mathcal{P}_2)$ pour $v = \nabla F(x)$, d'après ce qui précède.

Montrer que d est une direction de descente pour F en x .

On appellera cette direction, la direction de descente de plus forte pente pour la norme ℓ_1 .

7. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Définir par récurrence la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ démarrant en x_0 et correspondant à la méthode de descente dont la direction de descente est celle de plus forte pente pour la norme ℓ_1 et dont le pas est optimal.