Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Master $1^{\text{ère}}$ année, MMA, 2022-2023
OPTIMISATION

Seconde Session du 22/06/2023

Durée 1h30. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.

> Pour l'ensemble du sujet, on considère $M, N, P \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^M$, $\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{R}^P$ de leurs produits scalaires canoniques respectifs que l'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indépendamment de la dimension (par abus de langage). Associés à ces produits scalaires, on utilise de même la notation unique $\|\cdot\|_2$ pour les normes euclidiennes.

Exercice 1 (Cours)
Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable.

1. a) Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}^N$ si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N, \quad f(y) \geqslant f(x) + \langle \nabla f(x),\, y - x \rangle .$$

   b) On suppose que $x \in \mathbb{R}^N$ est un minimum local de f et que f est convexe. Montrer que x est un point critique de f. En déduire alors que x est un minimum global de f.

2. Soit $m > 0$. Montrer que f est m-fortement convexe sur $\mathbb{R}^N$ si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N, \quad f(y) \geqslant f(x) + \langle \nabla f(x),\, y - x \rangle + \frac{m}{2} \|y - x\|_2^2 .$$

Exercice 2
On définit pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$f(x) = \frac{1}{2} \|Hx - y\|_2^2 + \lambda \|Dx\|_2^2 + \mu \|x\|_2^2 ,$$

avec $H \in \mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{P,N}(\mathbb{R})$, $y \in \mathbb{R}^M$ un vecteur fixé et $\lambda, \mu > 0$ deux constantes.

1. a) Rappeler la définition d'une fonctionnelle quadratique. *On précisera bien la dimension des matrices et vecteurs impliquées.*

   b) Montrer que f est une fonctionnelle quadratique. *On vérifiera la cohérence des objets mathématiques entre eux à travers les dimensions des matrices et vecteurs impliquées.*

   c) Exprimer $\nabla f(x)$, en fonction des données du problème, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$?

   d) Exprimer $\nabla^2 f(x)$, en fonction des données du problème, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$?

2. Démontrer que f est strictement convexe.

3. Démontrer que f admet un unique minimum global.

4. Montrer que les hypothèses du théorème de convergence de la méthode de descente de gradient à pas optimal sont satisfaites.

5. On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite produite par l'algorithme de descente de gradient à pas optimal appliqué à f.

   a) Que pouvez-vous dire de la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

   b) Que dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, des vecteurs $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ et $\Delta x_{n+1} = x_{n+2} - x_{n+1}$?

6. Écrire en Python une fonction codant l'algorithme de descente du gradient à pas optimal pour la fonction f. Elle prendra en argument les différents paramètres du problème : H, D, y, λ, μ, ainsi que d'autres éventuelles paramètres que vous jugerez pertinent et renverra la suite des itérés $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3

Partie I : un résultat général d'existence de minimum.

On considère la fonction $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert, non vide, borné de $\mathbb{R}^N$. On suppose que f est continue, bornée inférieurement et tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, \alpha])$ est fermé dans $\mathbb{R}^N$.

1. Justifier que $p = \inf_{x \in U} f(x)$ existe ($p > -\infty$).
2. Démontrer l'existence d'une suite minimisante, c'est-à-dire d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de U, telle que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p$.
3. Démontrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $x_n \in f^{-1}(]-\infty, p+1])$.
4. En déduire que le problème $\inf_{x\in U} f(x)$ admet au moins une solution.

Partie II : barrière logarithmique.

On considère la fonction

$$f : x \mapsto -\sum_{i=1}^{m} \ln(b_i - \langle a_i, x\rangle),$$

avec $m \in \mathbb{N}^*$, et pout tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}^N$. On fait de plus l'hypothèse suivante

$$\forall v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\},\ \exists i_0 \in \{1, \dots, m\}, \quad \langle a_{i_0}, v\rangle > 0.$$

1. Questions préliminaires.

   a) On suppose dans cette question et les trois suivantes que $N = 2$. Représenter sur votre feuille en trois figures successives, les ensembles $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle e_1, x\rangle = 0\}$, $F_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle e_1, x\rangle = 1\}$ et $C_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 - \langle e_1, x\rangle > 0\}$, où $e_1 = (1, 0)$ est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

   b) Représenter l'ensemble $C_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 - \langle e_2, x\rangle > 0\}$.

   c) Finalement représenter l'ensemble $U = C_1 \cap C_2$. Trouver un vecteur $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tel que $\langle e_1, v\rangle \leqslant 0$ et $\cancel{\langle e_1, v\rangle \leqslant 0}$ $\langle e_2, v\rangle \leqslant 0$. Représenter ce vecteur sur votre figure ainsi que l'ensemble $\mathbb{R}_+^* v$. Montrer que $\mathbb{R}_+^* v \subset U$. L'ensemble U est-il borné ?

   d) Soit $C_1, C_2, \dots, C_m$ des sous ensembles convexes de $\mathbb{R}^N$. Montrer alors que $U = \cap_{i=1}^m C_i$ est également un convexe de $\mathbb{R}^N$.

2. a) Donner l'ensemble de définition de f, noté U. Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

   b) Montrer que U est convexe.

3. Justifier brièvement que f est $\mathcal{C}^2$ sur U.

4. a) Démontrer que pour tout $x \in U$, et tout $h \in \mathbb{R}^N$

$$df(x)(h) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle a_i, h\rangle}{b_i - \langle a_i, x\rangle}.$$

   b) En déduire $\nabla f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

5. a) Démontrer que pour tout $x \in U$, et tout $(h, k) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$

$$d^2 f(x)(h, k) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle a_i, h\rangle \langle a_i, k\rangle}{(b_i - \langle a_i, x\rangle)^2}.$$

   b) En déduire $\nabla^2 f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

   c) Démontrer que f est strictement convexe sur U.

6. a) Soit $x, x_0 \in U$. Justifier que

$$f(x) \geqslant f(x_0) + \left\langle \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{b_i - \langle a_i, x_0\rangle} a_i,\ x - x_0 \right\rangle.$$

   Puis montrer que

$$f(x_0) + \left\langle \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{b_i - \langle a_i, x_0\rangle} a_i,\ x - x_0 \right\rangle = f(x_0) + m - \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i - \langle a_i, x\rangle}{b_i - \langle a_i, x_0\rangle}.$$

   b) Déduire des deux précédentes questions que f est bornée inférieurement.

7. Bonus : On admet que U est borné. Déduire alors de l'ensemble des questions que f admet un unique minimum sur U.

8. Bonus : montrer que U est borné. *On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la compacité de la sphère unité de $\mathbb{R}^N$.*