Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Master 1ère année, MMA, 2022-2023

Optimisation

Partiel du 17/11/2022

Durée 1h30. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.

Total : 19.75 = 2.25 + 2.75 + 2 + 7 + 3.5 + 2.25.

Exercice 1 (Cours) (2.25pt)
Énoncer et démontrer le résultat caractérisant, via une condition faisant intervenir le gradient, les fonctions différentiables qui sont convexes.

Correction.
Voir cours (Théorème 2.35).
Énoncé : (0.75pt)
Preuve : (1.5pt)

Exercice 2 (17.5pt)
Les parties I, II, III et V sont indépendantes.

Partie I (2.75pt)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère

(1) $$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad J(x) = e^{\frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle},$$

avec A une matrice symétrique de taille $n \times n$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

1. Justifier que J est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla J(x)$ et $\nabla^2 J(x)$.
2. On suppose que A est définie positive.
   a) Montrer que J est strictement convexe.
   b) Décrire l'ensemble des extrema de J sur $\mathbb{R}^n$?

Partie II (2pt)

On suppose dans cette partie que

(2) $$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad J(x) = e^{\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + 3x_1x_2 - 7x_1 - 5x_2}.$$

1. Montrer que $f : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + 3x_1x_2 - 7x_1 - 5x_2$ est une fonctionnelle quadratique.
2. Montrer que $x^\star = (1, 2)$ est l'unique point critique de J et donner sa nature.
3. Que dire de la valeur de $\inf_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)$?

Partie III (7pt)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ une fonction $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $U \subset \Omega$ un ensemble convexe fermé non vide.

1. Donner une condition suffisante pour que $x \in \Omega$ soit un minimum local de φ.
2. a) Que signifie que $x \in U$ soit un minimum local de φ sur U ?
   b) Donner une condition nécessaire pour que $x \in U$ soit un minimum local de φ sur U.
3. On suppose uniquement dans cette question que $\Omega = \mathbb{R}^2$ et $U = (\mathbb{R}_-)^2$.
   a) Montrer que U est un ensemble convexe et le représenter.

b) On suppose que $x \in U$ est un minimum local de φ et que $\partial_1\varphi(x) \neq 0$ et $\partial_2\varphi(x) \neq 0$. Montrer que $x = (0, 0)$.

c) Représenter alors, en justifiant, la zone de $\mathbb{R}^2$ où $\nabla\varphi(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ doit appartenir.

On souhaite trouver une condition suffisante similaire à celle de la Question 1. (de cette partie) garantissant que $x \in U$, fixé, est un minimum local de φ sur U.

On définit le *cône tangent* de U en x l'ensemble : $T_U(x) = \mathbb{R}_+(U - x) = \{t(y - x) : t \in \mathbb{R}_+, y \in U\}$. On suppose que $T_U(x)$ est fermé.

On suppose dans la suite que

— $\forall h \in T_U(x)$, $\langle \nabla\varphi(x), h\rangle \geqslant 0$,

— $\forall h \in T_U(x) \setminus \{0\}$, $\left\langle \nabla^2\varphi(x)h, h\right\rangle > 0$.

4. a) Montrer que $T_U(x)$ est un cône, c'est-à-dire vérifie pour tout $\lambda > 0$, $\lambda T_U(x) \subset T_U(x)$. ~~Et montrer que $T_U(x)$ est un fermé.~~

b) Montrer que $T_U(x)$ est un ensemble convexe.

c) On suppose dans cette question uniquement que $n = 2$ et U est le triangle dont les sommets sont les points $(1, 1), (2, 1), (2, 2)$. Représenter $T_U(1, 1)$.

5. a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $h \in T_U(x)$, avec $\|h\| = 1$, on a $\left\langle \nabla^2\varphi(x)h, h\right\rangle \geqslant \alpha$.

b) En déduire que pour tout $h \in T_U(x)$, on a $\left\langle \nabla^2\varphi(x)h, h\right\rangle \geqslant \alpha \|h\|^2$.

c) Montrer alors que x est un minimum local de φ sur U. *Indication : on pourra considérer $y \in B(x, r) \cap U$, avec $r > 0$ bien choisi, et effectuer un développement de Taylor en x.*

Partie IV (3.5pt)

On reprend la fonction J de la Partie II définie en (2). On considère $U = \{(t, 3 + t) : t \in [-1, 1]\}$.

1. a) Trouver l'unique $x \in U$ tel que pour tout $y \in U$, $\langle \nabla J(x), y - x\rangle \geqslant 0$.

b) Déduire de la Partie III que x est un minimum local de J sur U.

2. a) Montrer que J est strictement convexe sur U.

b) Retrouver alors, par un autre raisonnement, le résultat de la Question 1.b) de cette partie, sachant que x est tel que pour tout $y \in U$, $\langle \nabla J(x), y - x\rangle \geqslant 0$.

Partie V (2.25pt)

On considère dans cette partie que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad J(x) = e^{\frac{1}{2}\|x-c\|^2},$$

avec $c \in \mathbb{R}^2$.

1. Décrire les lignes de niveau de J.

2. Montrer que J est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.

3. Justifier que J admet un unique minimum global et donner son expression.

4. On suppose que $U = \mathbb{R}_-$ et $c = (1, 1)$. Trouver le minimum global de J sur U.

Correction.

Partie I

1. J est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ comme composée de la fonction exponentielle et d'une fonction polynomiale en les coefficients de $x \in \mathbb{R}^n$ qui sont des fonctions $\mathcal{C}^2$ (0.25pt).

En notant $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ (qui est $\mathcal{C}^2$), on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla J(x) = e^{f(x)}\nabla f(x) = J(x)\nabla f(x)$. Or $\nabla f(x) = Ax - b$ (comme f est une fonctionnelle quadratique), d'où $\nabla J(x) = J(x)(Ax-b)$ (0.5pt).

> Détails du calcul [a] : par la formule de la différentielle de la composée, en notant $J = \exp \circ f$, on a pour tout $x, h \in \mathbb{R}^n$, $dJ(x)(h) = \exp'(f(x))\underbrace{df(x)(h)}_{\in\mathbb{R}} = e^{f(x)}df(x)(h) = J(x)df(x)(h)$ (car exp est une fonction de la variable réel donc $d(\exp)(f(x))$ est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a simplement $d(\exp)(f(x))(\alpha) = \exp'(f(x))\alpha = e^{f(x)}\alpha$). Or $df(x)(h) = \langle \nabla f(x), h\rangle$ comme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donc $dJ(x)(h) = \langle J(x)\nabla f(x), h\rangle$, d'où $\nabla J(x) = J(x)\nabla f(x)$. Comme f est une fonctionnelle quadratique, $\nabla f(x) = Ax - b$ et on obtient bien le résultat annoncé. On remarquera la cohérence dimensionnelle de l'ensemble du raisonnement.
>
> a. ajout post-correction des copies vu les difficultés rencontrées par tout le monde.

> On pouvait également trouver le résultat en différenciant $J(x+h)$ par rapport à h mais ici c'était nettement plus long que d'appliquer directement la formule de la différentielle de la composée étant donné la relative simplicité des quantités impliquées. Il n'y a pas qu'un chemin pour obtenir le résultat, l'essentiel est que celui emprunté soit mathématiquement juste et aboutisse !

> Plus généralement, on remarque que si $J = g \circ f$ avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions respectivement dérivable (= différentiable pour les fonctions de la variable réelle) et différentiable sur leurs domaines de définition, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla J(x) = g'(f(x))\nabla f(x)$. C'est le même raisonnement. Le faire en exercice.

Puis en différenciant ∇J, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla^2 J(x) = J(x)(Ax-b)(Ax-b)^T + J(x)A$ (0.5pt).

> On veut utiliser le fait que pour tout $x, h \in \mathbb{R}^n$, $d(\nabla J)(x)(h) = \nabla^2 J(x)h$. On peut donc différencier $\nabla J(x+h)$ par rapport à h. On a
>
> $$\begin{aligned} \nabla J(x+h) &= J(x+h)(A(x+h)-b), \\ &= J(x)(A(x+h)-b) + \langle \nabla J(x), h\rangle (A(x+h)-b) + o(\|h\|), \\ &= \underbrace{J(x)(Ax-b)}_{=\nabla J(x)} + J(x)Ah + \langle \nabla J(x), h\rangle (Ax-b) + \underbrace{\langle \nabla J(x), h\rangle Ah}_{=o(\|h\|)} + o(\|h\|), \\ &= \nabla J(x) + J(x)Ah + J(x)\underbrace{(Ax-b)^T h}_{\in\mathbb{R}}(Ax-b) + o(\|h\|), \\ &= \nabla J(x) + J(x)Ah + J(x)(Ax-b)(Ax-b)^T h + o(\|h\|). \end{aligned}$$
>
> On remarque que $(Ax-b)(Ax-b)^T$ est une matrice carré de taille n. On a d'après ce calcul, $d(\nabla J)(x)(h) = J(x)(A + (Ax-b)(Ax-b)^T)h$, d'où $\nabla^2 J(x) = J(x)(A + (Ax-b)(Ax-b)^T)$. De nouveau on peut vérifier à chaque étape que l'analyse dimensionnelle des forces en présence est cohérente.
> Alternativement, on a $d(\nabla J)(x)(h) = dJ(x)(h)(Ax-b) + J(x)Ah$, d'après la formule de la différentielle d'un produit et le fait que la différentielle de $x' \mapsto Ax' - b$ en x appliquée à h et Ah. D'où $d(\nabla J)(x)(h) = \langle \nabla J(x), h\rangle (Ax-b) + J(x)Ah$ et la suite du raisonnement est identique au précédent.

2. a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors $(Ax-b)(Ax-b)^T$ est une matrice symétrique positive car pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $\big\langle (Ax-b)(Ax-b)^T h, h\big\rangle = \langle Ax-b, h\rangle^2 \geqslant 0$. Ainsi $(Ax-b)(Ax-b)^T + A \succeq A \succ 0$. Comme $J(x) > 0$, on déduit donc que $\nabla^2 J(x) \succ 0$, i.e. c'est une matrice symétrique définie positive. Donc J est strictement convexe (0.75pt).

b) L'ensemble des extrema de J sur $\mathbb{R}^n$ est inclus dans l'ensemble des points critiques de J. Or $x \in \mathbb{R}^n$ est un point critique de J si et seulement si $Ax - b = 0$. Comme A est définie positive, A est

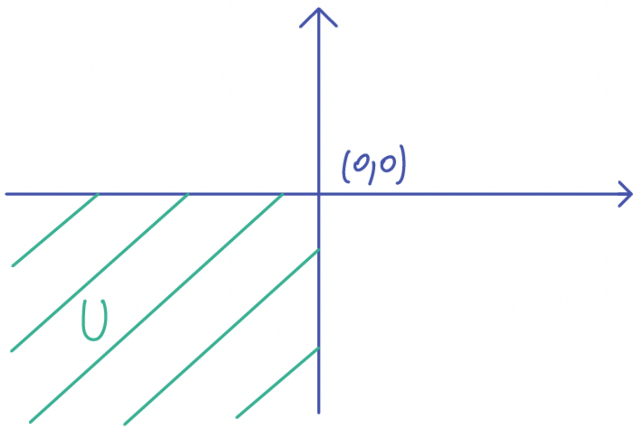

FIGURE 1. Représentation de l'ensemble $U = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$.

inversible, donc J admet un unique point critique : $A^{-1}b$. Comme J est (strictement) convexe, $A^{-1}b$ est un minimum global de J (0.75pt).

PARTIE II

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax,\, x\rangle - \langle b,\, x\rangle$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = (7,5). \quad (0.5pt) \tag{3}$$

Comme A est symétrique, f est bien une fonctionnelle quadratique (0.25pt).

2. On a $\nabla f(x^\star) = Ax^\star - b = 0$. On a $\det(A) = -8 \neq 0$, donc A est inversible, d'où $x^\star$ est l'unique point critique de f. Comme A est une matrice symétrique carré de taille 2 et que $\det(A) < 0$, on déduit que A est diagonalisable et ses valeurs propres sont de signes opposées. Et puisque $\nabla^2 f(x^\star) = A$, on déduit donc que $x^\star$ est un point col (0.75pt).

> Complément sur le raisonnement sous-jacent : comme A est symétrique, A est diagonalisable dans une base orthonormée. Notons v_1 et v_2 des vecteurs propres associées aux valeurs propres λ_1 et λ_2 tels que (v_1, v_2) forment une base orthonormée. On suppose que $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$ (on a $-8 = \det(A) = \lambda_1\lambda_2$ et $2 = \mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$). Alors pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $f(x^\star + tv) = f(x^\star) + \frac{t^2}{2}\langle Av,\, v\rangle$, donc $f(x^\star + tv_1) = f(x^\star) + \lambda_1\frac{t^2}{2} < f(x^\star)$ et $f(x^\star + tv_2) = f(x^\star) + \lambda_2\frac{t^2}{2} > f(x^\star)$. On a donc bien un point col en $x^\star$ pour f.

3. D'après le cours, $\inf_{\mathbb{R}^2} f(x)$ est fini si et seulement si A est positive et f a un point critique. Comme A n'est pas positive, on déduit donc que $\inf_{\mathbb{R}^2} f(x) = -\infty$ (0.5pt).

PARTIE III

1. Il faut que $x \in \Omega$ soit un point critique i.e. $\nabla\varphi(x) = 0$ et $\nabla^2\varphi(x) \succ 0$ (0.5pt).

2. a) $x \in U$ est un minimum local pour φ sur U si et seulement si il existe $r > 0$, tel que pour tout $y \in B(x,r) \cap U$, $\varphi(y) \geqslant \varphi(x)$ (0.25pt).

   b) Si x est un minimum local pour φ sur U, alors x doit satisfaire les conditions d'optimalité d'ordre 1 relativement à U, i.e. pour tout $y \in U$, $\langle \nabla\varphi(x),\, y - x\rangle \geqslant 0$ (0.25pt).

3. a) Soit $x, y \in U$, $t \in [0,1]$, alors $(1-t)x + ty = \left(\underbrace{(1-t)x_1 + ty_1}_{\leqslant 0}, \underbrace{(1-t)x_2 + ty_2}_{\leqslant 0}\right)$ donc $(1-t)x + ty \in U$ et U est convexe (0.25pt). Voir Figure 1 pour une représentation de cet ensemble (0.25pt).

   b) Si $x = (x_1, x_2) \in U$ est tel que $x_1 \neq 0$ ou $x_2 \neq 0$, alors par exemple supposons $x_1 \neq 0$. Donc il existe $r > 0$ tel que pour tout $h = (h_1, 0) \in B(0,r)$, on a $x + h \in U$ et $f(x+h) \geqslant f(x)$. Soit $h = (h_1, 0) \in B(0,r)$, alors en faisant un développement de Taylor à l'ordre 1 de $f(x+h)$ en x par rapport à h on obtient $\langle \nabla\varphi(x),\, h\rangle \geqslant 0$. En faisant un développement de Taylor à l'ordre 1 de $f(x-h)$ en x par rapport à $-h$ on obtient $\langle \nabla\varphi(x),\, h\rangle \leqslant 0$. D'où $\langle \nabla\varphi(x),\, h\rangle = 0$ i.e. $\partial_1\varphi(x)h_1 = 0$. Ainsi,

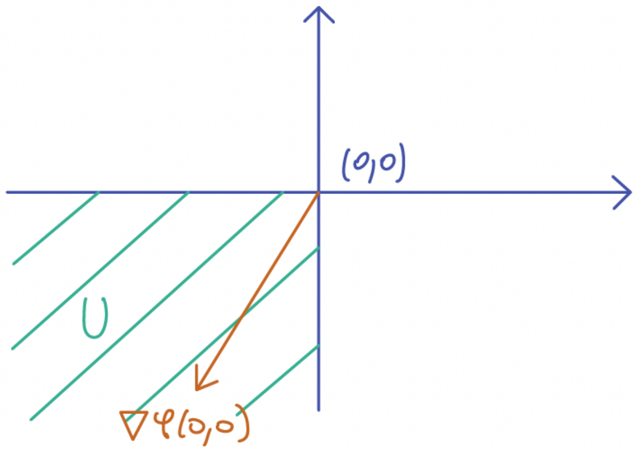

FIGURE 2. On a nécessairement $\nabla\varphi(0,0) \in U$ dès que $(0,0)$ est un minimum local de φ sur U.

comme c'est vrai pour tout $h = (h_1, 0) \in B(0,r)$, $\partial_1\varphi(x) = 0$. Ce qui est impossible par hypothèse. Donc $x_1 = 0$. De même on ne peut avoir $x_2 \neq 0$. Par conséquent $x = (0,0)$ (1pt).

c) Voir Figure 2. On doit avoir pour tout $y \in U$, $\langle \nabla\varphi(0,0),\, y\rangle \geqslant 0$, d'où nécessairement $\partial_1\varphi(0,0) \leqslant 0$ et $\partial_2\varphi(0,0) \leqslant 0$ i.e. $\nabla\varphi(0,0) \in U$ (0.5pt).

4. a) Soit $x \in U$. Soit $\lambda > 0$, on a $T_U(x) = \{\mu(y-x) : \mu \in \mathbb{R}_+, y \in U\}$, donc $\lambda T_U(x) = \{\lambda\mu(y-x) : \mu \in \mathbb{R}_+, y \in U\} = T_U(x)$. D'où $T_U(x)$ est un cône (0.25pt). ~~Comme U et $\mathbb{R}_+$ sont fermé, c'est aussi le cas de $T_U(x) = \mathbb{R}_+(U-x)$ (0.25pt).~~

b) Soit $\mu_1(y_1 - x) \in T_U(x)$ et $\mu_2(y_2 - x) \in T_U(x)$ deux éléments quelconques de $T_U(x)$, avec $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}_+$ et $y_1, y_2 \in U$. Soit $t \in]0,1[$. Il s'agit de montrer que $(1-t)\mu_1(y_1-x) + t\mu_2(y_2-x) \in T_U(x)$, i.e. il existe $\mu \in \mathbb{R}_+$ et $y \in U$ tels que $(1-t)\mu_1(y_1-x)+t\mu_2(y_2-x) = \mu(y-x)$ (0.25pt). On peut supposer que $\mu_1 > 0$ ou $\mu_2 > 0$, car sinon $\mu_1(y_1-x) = 0$ et $\mu_2(y_2-x) = 0$ et donc $(1-t)\mu_1(y_1-x)+t\mu_2(y_2-x) = 0 \in T_U(x)$ (0.25pt). Voir Figure 3 pour le raisonnement présentée de manière qualitative.
Analyse : cherchons $t' \in [0,1]$ et $\mu \in \mathbb{R}_+$ tels que $(1-t)\mu_1(y_1-x)+t\mu_2(y_2-x) = \mu((1-t')y_1+t'y_2)-x)$. En identifiant le coefficient sur x, on trouve $\mu = (1-t)\mu_1 + t\mu_2$. Par hypothèse on a $\mu > 0$ (car $t \in]0,1[$ et $\mu_1 > 0$ ou $\mu_2 > 0$). En identifiant alors par rapport à y_2, on trouve $t' = \frac{t\mu_2}{(1-t)\mu_1+t\mu_2} \in]0,1[$. Vérifions que t' et μ conviennent.
Synthèse : posons donc $t' = \frac{t\mu_2}{(1-t)\mu_1+t\mu_2} \in]0,1[$ et $\mu = (1-t)\mu_1 + t\mu_2 > 0$. Alors

$$\begin{aligned}\mu((1-t')y_1 + t'y_2 - x) &= \mu\left(\frac{(1-t)\mu_1}{\mu}y_1 + \frac{t\mu_2}{\mu}y_2 - (1-t')x - t'x\right),\\ &= (1-t)\mu_1(y_1-x) + t\mu_2(y_2-x).\end{aligned}$$

Et comme $(1-t')y_1 + t'y_2 \in U$ par convexité de U, on déduit donc bien que $(1-t)\mu_1(y_1-x) + t\mu_2(y_2-x) \in T_U(x)$ (0.75pt).

c) Voir Figure 4 (0.5pt).

5. a) On sait que $T_U(x)$ est non vide et fermé. Ainsi $T_U(x) \cap \{h \in \mathbb{R}^n : \|h\| = 1\}$ est un fermé borné donc compact (0.25pt). Donc par continuité de $h \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle \nabla^2\varphi(x)h,\, h\rangle$, il existe donc $h_1 \in T_U(x)$ tel que $\|h_1\| = 1$ et vérifiant pour tout $h \in T_U(x)$, avec $\|h\| = 1$, $\langle \nabla^2\varphi(x)h,\, h\rangle \geqslant \langle \nabla^2\varphi(x)h_1,\, h_1\rangle$ (0.25pt). Posons donc $\alpha = \langle \nabla^2\varphi(x)h_1,\, h_1\rangle$. On a par hypothèse $\alpha > 0$ (0.25pt). D'où la conclusion.

b) On utilise la bilinéarité du produit scalaire (0.25pt).

c) Comme Ω ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \Omega$. Par la formule de Taylor-Young à l'ordre 2, il existe $\varepsilon : B(x,r) \to \mathbb{R}$ tel que $\varepsilon(y) \underset{y\to x}{\longrightarrow} 0$ et pour $y \in B(x,r) \cap U$

$$\varphi(y) = \varphi(x) + \langle \nabla\varphi(x),\, y-x\rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla^2\varphi(x)(y-x),\, y-x\rangle + \|y-x\|^2\,\varepsilon(y), \quad (0.5pt)$$

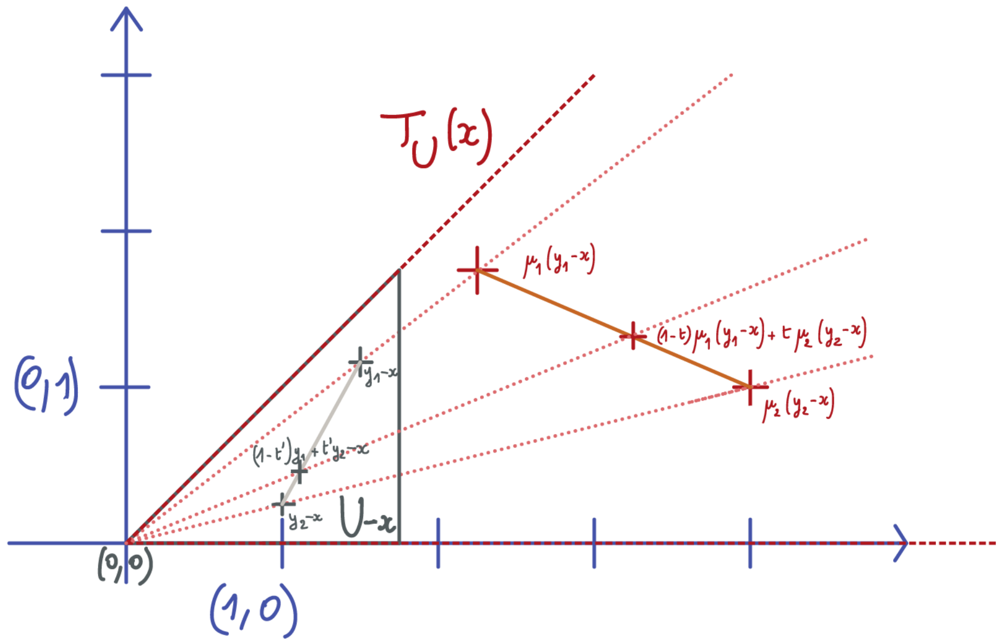

Figure 3. On a représenté ici, pour plus de clarté, l'ensemble $U-x$ et non U. L'ensemble $U-x$ reste convexe (la translatée d'un ensemble convexe est convexe). On remarque que la demi-droite démarrant de $(0,0)$ et passant par $(1-t)\mu_1(y_1-x)+t\mu_2(y_2-x)$ coupe le segment $[y_1-x, y_2-x]$, qui est inclu dans $U-x$ par convexité de $U-x$, en un point $y-x=(1-t')y_1+t'y_2-x$ pour un certain $t' \in [0,1]$. Ainsi $(1-t)\mu_1(y_1-x)+t\mu_2(y_2-x)$ s'écrit forcément $\mu(y-x)$ avec $\mu \in \mathbb{R}_+$, donc est dans $T_U(x)$ qui est par conséquent convexe.

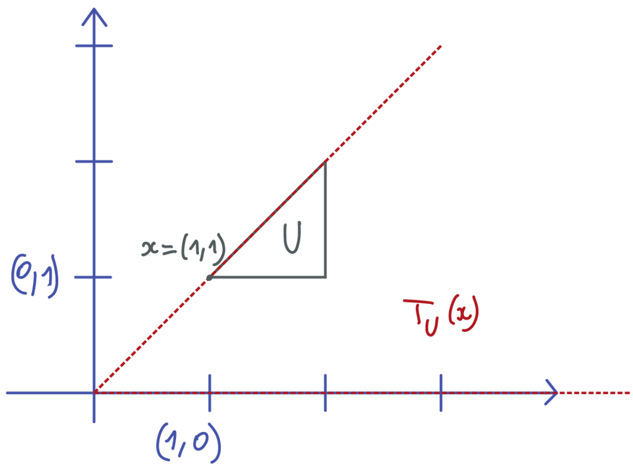

Figure 4. Cône tangent $T_U(x)$ lorsque U est le triangle formé par les sommets $(1,1)$, $(2,1)$ et $(2,2)$.

Comme $y-x \in T_U(x)$, on a donc $\langle \nabla\varphi(x),\, y-x\rangle \geqslant 0$ et $\left\langle \nabla^2\varphi(x)(y-x),\, y-x\right\rangle \geqslant \alpha\,\|y-x\|^2$, d'où

$$\varphi(y)-\varphi(x) \geqslant \|y-x\|^2\left(\frac{\alpha}{2}+\varepsilon(y)\right).$$

Quitte à choisir $r>0$ plus petit, comme $\varepsilon(\cdot)$ tend vers 0 quand y tend vers x, on peut supposer que $\frac{\alpha}{2}+\varepsilon(y) \geqslant 0$. D'où $\varphi(y) \geqslant \varphi(x)$. Le point $x \in U$ est donc bien un minimum local de φ sur U (0.5pt).

Partie IV

1. a) Soit $x=(0,3)+t(1,1) \in U$, avec $t \in [-1,1]$ et $y=(0,3)+t'(1,1) \in U$, avec $t' \in [-1,1]$. On a $\nabla J(x) = J(x)(Ax-b) = J(x)\left(A\left((0,3)+t(1,1)\right)-(7,5)\right) = J(x)\left((2,-2)+4t(1,1)\right)$, où A et b sont

définies à l'équation (3) et $J(x) > 0$ (0.25pt). Donc

$$\begin{aligned}
\forall y \in U,\ \langle \nabla J(x),\, y - x\rangle \geqslant 0 &\Leftrightarrow \forall t' \in [-1,1],\ (t'-t)J(x)\,\langle (2,-2) + 4t(1,1),\,(1,1)\rangle \geqslant 0,\\
&\Leftrightarrow \forall t' \in [-1,1],\ 8t(t'-t)J(x) \geqslant 0,\ (0.25pt)\\
&\Leftrightarrow t = 0.
\end{aligned}$$

Pour la dernière équivalence, on a utilisé le fait que si $t > 0$, alors pour $t' \in [-1, t[$, on a $8t(t'-t)J(x) < 0$, et si $t < 0$ alors pour $t' \in]t, 1]$, on a de nouveau $8t(t'-t)J(x) < 0$ (0.25pt). Ainsi $x = (0,3) \in U$ est l'unique élément de U qui vérifie pour tout $y \in U$, $\langle \nabla J(x),\, y - x\rangle \geqslant 0$ (0.25pt).

> $x = (0,3)$ est donc l'unique candidat pour être un minimum local de J sur U.

b) L'ensemble U est convexe et pour $x = (0,3) \in U$, on a $T_U(x) = \mathrm{Vect}((1,1))$. On déduit de la question précédente que pour tout $h \in T_U(x) = \mathbb{R}_+(U - x)$, on a $\langle \nabla J(x),\, h\rangle \geqslant 0$ (0.5pt).
On a, d'après la partie I, pour tout $x' \in \mathbb{R}^2$, $\nabla^2 J(x') = J(x')((Ax'-b)(Ax'-b)^T + A)$, où A et b sont définies dans la partie II. Donc pour $x' = x = (0,3)$, on a $\nabla^2 J(x) = J(x)((2\ \ -2)(2\ \ -2)^T + A)$ (0.25pt). Vérifions que pour tout $h \in T_U(x)$, $h \neq 0$, on a $\left\langle \nabla^2 J(x)h,\, h\right\rangle > 0$. Soit $h = t(1,1) \in T_U(x)$ avec $t \in \mathbb{R}^*$. Alors

$$\left\langle \nabla^2 J(x)h,\, h\right\rangle = t^2 J(x)\left\langle \left((2\ \ -2)(2\ \ -2)^T + A\right)(1,1),\,(1,1)\right\rangle = 4t^2 J(x)\,\|(1,1)\|^2 > 0,\ (0.5pt)$$

où on a utilisé le fait que $\left((2\ \ -2)(2\ \ -2)^T\right)(1,1) = (2,2)\,\langle (2,-2),\,(1,1)\rangle = 0$. Donc les hypothèses de la Partie III sont satisfaites et d'après la Question 2.c), on déduit que $(0,3)$ est un minimum local (et c'est le seul) de J sur U.

2. a) Soit $\tilde{x} = (0,3) + t(1,1) \in U$, avec $t \in [-1,1]$, et $y = (0,3) + t'(1,1) \in U$, avec $t' \in [-1,1]$. On suppose $\tilde{x} \neq y$, donc $t \neq t'$. Alors on a

$$\begin{aligned}
\left\langle \nabla^2 J(\tilde{x})(y-\tilde{x}),\,(y-\tilde{x})\right\rangle &= (t'-t)^2 J(\tilde{x})\left\langle \left((A\tilde{x}-b)(A\tilde{x}-b)^T + A\right)(1,1),\,(1,1)\right\rangle,\\
&= (t'-t)^2 J(\tilde{x})\left(\langle A\tilde{x}-b,\,(1,1)\rangle^2 + \langle A(1,1),\,(1,1)\rangle\right),\\
&= (t'-t)^2 J(\tilde{x})\left(\langle A\tilde{x}-b,\,(1,1)\rangle^2 + 4\,\|(1,1)\|^2\right) > 0.\ (0.5pt)
\end{aligned}$$

D'où (d'après le cours Théorème 2.36) J est strictement convexe sur U (0.25pt).

b) On sait que pour tout $y \in U$, $\langle \nabla J(x),\, y - x\rangle \geqslant 0$ et J (strictement) convexe sur U donc d'après le cours (Théorème 2.37), on déduit que x est un minimum global de J sur U. C'est donc en particulier aussi un minimum local (0.5pt).

Partie V

1. Les lignes de niveau de J sont les cercles de centre c (0.5pt).
2. J a la même structure que dans la première partie avec $A = I_2$ qui est définie positive. On déduit donc que J est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ (0.25pt).
3. Comme J est strictement convexe, J admet au plus un minimum global sur $\mathbb{R}^2$. Le seul point critique de J est c. Donc c'est l'unique minimum global de J sur $\mathbb{R}^2$ (0.5pt).
4. Comme J est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$, elle l'est aussi sur U convexe (0.25pt). Donc J admet au plus un minimum global sur U (0.25pt). Vu la position relative de U et c, et les lignes de niveau de J, on intuite que c'est $(0,0)$. Pour le montrer, il suffit donc de vérifier que $(0,0)$ satisfait les conditions d'optimalité : pour tout $y \in U$, $\langle \nabla J(0,0),\, y\rangle \geqslant 0$. Or $\nabla J(0,0) = -e^{\frac{1}{2}\|c\|^2} c$, d'où pour tout $y \in U$, $\langle \nabla J(0,0),\, y\rangle = -e^{\frac{1}{2}\|c\|^2}\langle c,\, y\rangle = -e^{\frac{1}{2}\|c\|^2}(y_1 + y_2) \geqslant 0$, car $y_1, y_2 \leqslant 0$ (0.5pt).