Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Master 1ère année, MMA, 2022-2023
Optimisation

Partiel du 17/11/2022

Durée 1h30. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 (Cours)
Énoncer et démontrer le résultat caractérisant, via une condition faisant intervenir le gradient, les fonctions différentiables qui sont convexes.

Exercice 2
Les parties I, II, III et V sont indépendantes.

Partie I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad J(x) = e^{\frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle}, \tag{1}$$

avec A une matrice symétrique de taille $n \times n$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

1. Justifier que J est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla J(x)$ et $\nabla^2 J(x)$.
2. On suppose que A est définie positive.
   a) Montrer que J est strictement convexe.
   b) Décrire l'ensemble des extrema de J sur $\mathbb{R}^n$?

Partie II

On suppose dans cette partie que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad J(x) = e^{\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + 3x_1x_2 - 7x_1 - 5x_2}. \tag{2}$$

1. Montrer que $f : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + 3x_1x_2 - 7x_1 - 5x_2$ est une fonctionnelle quadratique.
2. Montrer que $x^\star = (1, 2)$ est l'unique point critique de J et donner sa nature.
3. Que dire de la valeur de $\inf_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)$?

Partie III

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ une fonction $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $U \subset \Omega$ un ensemble convexe fermé non vide.

1. Donner une condition suffisante pour que $x \in \Omega$ soit un minimum local de φ.
2. a) Que signifie que $x \in U$ soit un minimum local de φ sur U ?
   b) Donner une condition nécessaire pour que $x \in U$ soit un minimum local de φ sur U.
3. On suppose uniquement dans cette question que $\Omega = \mathbb{R}^2$ et $U = (\mathbb{R}_-)^2$.
   a) Montrer que U est un ensemble convexe et le représenter.
   b) On suppose que $x \in U$ est un minimum local de φ et que $\partial_1\varphi(x) \neq 0$ et $\partial_2\varphi(x) \neq 0$. Montrer que $x = (0, 0)$.
   c) Représenter alors, en justifiant, la zone de $\mathbb{R}^2$ où $\nabla\varphi(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ doit appartenir.

On souhaite trouver une condition suffisante similaire à celle de la Question 1. (de cette partie) garantissant que $x \in U$, fixé, est un minimum local de φ sur U.

On définit le cône tangent de U en x l'ensemble : $T_U(x) = \mathbb{R}_+(U - x) = \{t(y - x) : t \in \mathbb{R}_+, y \in U\}$. On suppose que $T_U(x)$ est fermé.

On suppose dans la suite que

- $\forall h \in T_U(x)$, $\langle \nabla\varphi(x),\, h\rangle \geqslant 0$,
- $\forall h \in T_U(x) \setminus \{0\}$, $\langle \nabla^2\varphi(x)h,\, h\rangle > 0$.

4. a) Montrer que $T_U(x)$ est un cône, c'est-à-dire vérifie pour tout $\lambda > 0$, $\lambda T_U(x) \subset T_U(x)$. ~~Et montrer que $T_U(x)$ est un fermé.~~

   b) Montrer que $T_U(x)$ est un ensemble convexe.

   c) On suppose dans cette question uniquement que $n = 2$ et U est le triangle dont les sommets sont les points $(1, 1), (2, 1), (2, 2)$. Représenter $T_U(1, 1)$.

5. a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $h \in T_U(x)$, avec $\|h\| = 1$, on a $\langle \nabla^2\varphi(x)h,\, h\rangle \geqslant \alpha$.

   b) En déduire que pour tout $h \in T_U(x)$, on a $\langle \nabla^2\varphi(x)h,\, h\rangle \geqslant \alpha\, \|h\|^2$.

   c) Montrer alors que x est un minimum local de φ sur U. Indication : on pourra considérer $y \in B(x, r) \cap U$, avec $r > 0$ bien choisi, et effectuer un développement de Taylor en x.

Partie IV

On reprend la fonction J de la Partie II définie en (2). On considère $U = \{(t, 3 + t) : t \in [-1, 1]\}$.

1. a) Trouver l'unique $x \in U$ tel que pour tout $y \in U$, $\langle \nabla J(x),\, y - x\rangle \geqslant 0$.

   b) Déduire de la Partie III que x est un minimum local de J sur U.

2. a) Montrer que J est strictement convexe sur U.

   b) Retrouver alors, par un autre raisonnement, le résultat de la Question 1.b) de cette partie, sachant que x est tel que pour tout $y \in U$, $\langle \nabla J(x),\, y - x\rangle \geqslant 0$.

Partie V

On considère dans cette partie que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad J(x) = e^{\frac{1}{2}\|x - c\|^2},$$

avec $c \in \mathbb{R}^2$.

1. Décrire les lignes de niveau de J.
2. Montrer que J est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.
3. Justifier que J admet un unique minimum global et donner son expression.
4. On suppose que $U = \mathbb{R}_-$ et $c = (1, 1)$. Trouver le minimum global de J sur U.