Nom :
Prénom :
No étudiant :

Université Paris Cité
UFR Mathématiques et Informatique
2023-2024

M1 MMA - Interro n°1

Durée 25mn. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (10pt)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. On pose $g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle + c$ et $f = e^g$.

1. a) Montrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$.
   b) Montrer que f admet un unique minimum global sur $\mathbb{R}^n$.
2. On considère dans cette question $n = 2$, $A = I_2$, $b = (1, 1)$, $c = 1$. On définit C le carré de sommets les points $(2, 0)$, $(3, 0)$, $(3, -1)$ et $(2, -1)$.
   a) Décrire les lignes de niveau de f.
   b) Trouver l'unique minimum global de f sur C. *Indication : vous pourrez, pour initier le raisonnement, vous aider d'une interprétation géométrique du problème.*

Correction.
$11 = 5 + 1.5 + 1 + 3.5$

1. a) g est polynomiale en ses coefficients donc g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$. Par composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, on a donc f $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ (0.5pt).
Soit $x, h \in \mathbb{R}^n$, par formule de la différentielle d'une composée, on a $df(x)(h) = e^{g(x)}dg(x)(h) = f(x)\langle Ax - b, h\rangle$.
Par conséquent $\nabla f(x) = f(x)(Ax - b)$ (1pt).
Puis

$$\begin{aligned}
\nabla f(x+h) &= f(x+h)(A(x+h)-b) = \nabla f(x) + df(x)(h)(Ax-b) + f(x)Ah + o_{h\to 0}(h),\\
&= \nabla f(x) + f(x)\langle Ax-b,\, h\rangle (Ax-b) + f(x)Ah + o_{h\to 0}(h),\\
&= \nabla f(x) + f(x)\left(\underbrace{(Ax-b)^T h}_{\in\mathbb{R}}(Ax-b) + Ah\right) + o_{h\to 0}(h),\\
&= \nabla f(x) + f(x)\left(\underbrace{(Ax-b)(Ax-b)^T}_{\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} h + Ah\right) + o_{h\to 0}(h),\\
&= \nabla f(x) + f(x)\left((Ax-b)(Ax-b)^T + A\right)h + o_{h\to 0}(h).
\end{aligned}$$

Donc par identification, on a $\nabla^2 f(x) = f(x)\left((Ax-b)(Ax-b)^T + A\right)$ (2pt).
Or pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $(Ax-b)(Ax-b)^T$ est une matrice symétrique positive, car pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $h^T(Ax-b)(Ax-b)^T h = \langle Ax-b,\, h\rangle^2 \geqslant 0$. Donc comme A est symétrique définie positive et $f(x) > 0$, on a $\nabla^2 f(x)$ symétrique définie positive.
Comme c'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, f est donc strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$ (1.5pt).

b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\nabla f(x) = 0$ si et seulement si $Ax - b = 0$ (puisque $f(x) > 0$). Comme A est inversible, $A^{-1}b$ est donc l'unique point critique de f, d'où f admet au plus un minimum global. Or comme f est (strictement) convexe sur $\mathbb{R}^n$, un point critique de f est automatiquement un minimum global. Par conséquent $A^{-1}b$ est l'unique minimum global de f sur $\mathbb{R}^n$ (1.5pt).

2. a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $g(x) = \frac{1}{2}(x_1 - 1)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 1)^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $L_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, f(x) = \lambda\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 = 2\log(\lambda)\}$. Pour que $L_\lambda \neq \varnothing$, il faut donc nécessairement $\lambda \geqslant 1$, et alors la ligne de niveau λ de f est le cercle de centre b et de rayon $2\log(\lambda)$ (1pt).

b) On conjecture, grâce à l'observation de C et des lignes de niveau de f, que cet unique minimum global est $x = (2, 0)$ (0.5pt). Comme f est (strictement) convexe sur le convexe C, il suffit de vérifier que x satisfait la condition

$$\forall y \in C, \quad \langle \nabla f(x), y - x\rangle \geqslant 0. \tag{1}$$

Soit $y = (y_1, y_2) \in C$, on a $\langle \nabla f(x), y - x\rangle = f(x)\langle Ax - b, y - x\rangle = f(x)\langle x - (1,1), (y_1 - 2, y_2)\rangle = f(x)\left((y_1 - 2) + (-1)y_2\right)$. Or comme $y \in C$, on a $y_1 \geqslant 2$ et $y_2 \leqslant 0$, d'où (1) est bien satisfaite (2pt).

On pouvait montrer de manière théorique que f admet un unique minimum global sur C. En effet l'ensemble C est compact et f continue sur $\mathbb{R}^2$ donc f est bornée et atteint ses bornes sur C. En particulier f admet un minimum global sur C. Comme C est convexe et f strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$, f est donc strictement convexe sur C. D'où f admet un unique minimum global sur C.
Mais comme on intuite facilement un candidat pour un minimum global grâce à des observations géométriques, on peut se passer de ce raisonnement et directement montrer que le candidat satisfait les conditions d'optimalité (comme fait ci-dessus).