Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Master 1ère année, MMA, 2022-2023
Optimisation

Examen du 09/01/2023

Durée 2h. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.

Total : 25.75 = 3.5 + 14.5 + 7.75, bonus : 0.5.

Exercice 1 (Cours) (3.5pt)

1. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe non vide et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur U. On suppose de plus que f admet en $x \in U$ un minimum local.
   a) Que peut-on alors dire de x pour f ?
   b) Prouver le résultat.
2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $U \subset \Omega$ un sous-ensemble convexe non vide de Ω. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur Ω et on suppose f convexe sur U. Soit $x \in U$.
   a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que x soit un minimum global de f et faisant intervenir $\nabla f(x)$.
   b) Prouver cette CNS.
   c) Que devient la CNS si on a $U = \Omega$? *On n'attend pas de justification.*

Correction.
Essentiellement voir Théorème 2.37.

1. a) x est un minimum global de f sur U (0.5pt).
   b) Voir la preuve de a) du théorème 2.37 (1pt).
2. a) x est un minimum global de f sur U si et seulement si pour tout $y \in U$, $\langle \nabla f(x), y - x \rangle \geqslant 0$ (0.5pt).
   b) Voir la preuve de c) du théorème 2.37 (1pt).
   c) La condition *pour tout* $y \in U$, $\langle \nabla f(x), y - x \rangle \geqslant 0$ est remplacée par $\nabla f(x) = 0$ (0.5pt).

Exercice 2 (14.5pt)

Soit $M, n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. Dans la suite, on considère $\mathbb{R}^M$ et $\mathbb{R}^n$ munis de leurs produits scalaires canoniques respectifs que l'on note (par abus de langage) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indépendamment de la dimension. Associés à ces produits scalaires, on utilise la notation unique (par abus de langage) $\|\cdot\|$ pour les normes euclidiennes.

On suppose donnée une séquence de M points $x_1, x_2, \ldots, x_M$ de $\mathbb{R}^n$, et pour chacun d'entre eux est associé une classe $y_i \in \{-1, 1\}$ pour $i \in \{1, \ldots, M\}$. Voir la figure 1 pour une illustration. On dit que la famille des couples, éléments de $\mathbb{R}^n \times \{-1, 1\}$, $((x_i, y_i))_{1 \leqslant i \leqslant M}$ forment les *données d'entraînement.*

On souhaite trouver un hyperplan (ou une droite dans le cas $n = 2$ comme sur la figure 1) passant par 0 et séparant, du mieux possible, ces points x_i entre ceux qui sont de la classe représentée par -1 et ceux de la classe représentée par 1.

Pour cela on considère la fonction suivante, pour $\lambda > 0$

$$F : a \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2M} \sum_{i=1}^{M} (1 - y_i \langle x_i, a \rangle)^2 + \frac{\lambda}{2} \|a\|^2 .$$

Et on s'intéresse au problème d'optimisation suivant

$$\inf_{a \in \mathbb{R}^n} F(a).$$

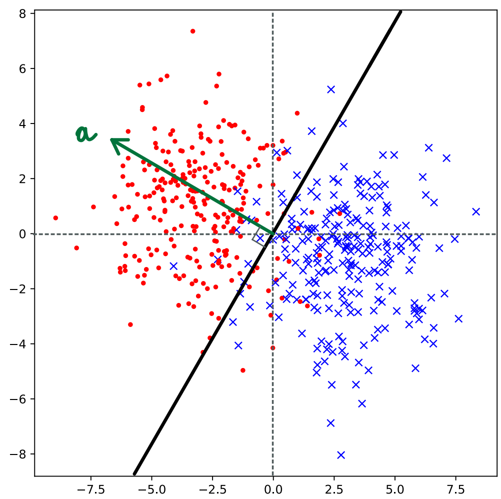

FIGURE 1. Exemple de points $x_i \in \mathbb{R}^2$. Ceux représentés par une croix, respectivement par un point, appartiennent à la classe -1, resp. 1. La droite représentée, notée $\mathcal{D}$, est $\{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, a \rangle = 0\}$. Vu le sens de a, tous les $x \in \mathbb{R}^2$ à gauche de $\mathcal{D}$ satisfont $\langle x, a \rangle > 0$, et à droite de $\mathcal{D}$, $\langle x, a \rangle < 0$. On associe à $f_a : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle x, a \rangle$ (définissant en particulier $\mathcal{D}$), entièrement caractérisée par $a \in \mathbb{R}^2$, un coût $F(a)$. L'idée est de trouver un a de plus faible coût $F(a)$, en espérant que le F définie par le modèle permettent d'aboutir à un f_a effectuant une "bonne" classification.

PARTIE I (5.75PT)

1. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ tel que la quantité $\frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{M}(1 - y_i \langle x_i, a \rangle)^2$ est "petite". Pourquoi peut-on alors avoir confiance que la fonction $f_a : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle x, a \rangle$ permette de séparer "correctement" les points x_i en fonction de leurs classes y_i ? Et comment cette séparation est-elle effectuée ?
2. Justifier que F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que F admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$, que l'on notera $a^\star_\lambda \in \mathbb{R}^n$.
4. a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$,

$$\nabla F(a) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(y_i \langle x_i, a \rangle - 1) y_i x_i + \lambda a.$$

   b) Déterminer pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $\nabla^2 F(a)$.
5. a) Montrer que F est strictement convexe.
   b) En déduire l'ensemble $\arg\min_{a\in\mathbb{R}^n} F(a)$.

PARTIE II (3.5PT)

On va maintenant revisiter les résultats précédents en adoptant un point de vue matriciel. On définit le vecteur $\mathbb{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^M$ et $Z \in \mathcal{M}_{n,M}(\mathbb{R})$ la matrice dont la i-ème colonne est donnée par le vecteur $y_i x_i = (y_i x_{i,1}, \dots, y_i x_{i,n}) \in \mathbb{R}^n$.

6. Rappeler la définition d'une fonctionnelle quadratique $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
7. a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $F(a) = \frac{1}{2M}\left\|\mathbb{1} - Z^T a\right\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|a\|^2$.
   b) En déduire que F est une fonctionnelle quadratique.
8. Donner alors, en utilisant les notations introduites dans cette partie, une expression de $\nabla F(a)$ et $\nabla^2 F(a)$, pout tout $a \in \mathbb{R}^n$.
9. En déduire une expression de $a^\star_\lambda$, puis $\lim_{\lambda\to+\infty} a^\star_\lambda$. Pourquoi est-ce logique d'obtenir cette limite sachant la manière dont est construite la fonction objectif F ?

Partie III (5.25pt)

10. Justifier pourquoi on peut appliquer l'algorithme de descente de gradient à pas optimal à F.

11. Montrer que les hypothèses du théorème de convergence de l'algorithme de descente de gradient à pas optimal appliqué à F sont bien satisfaites.

12. Écrire en Python une fonction codant cet algorithme, prenant en argument un point initial $a_0 \in \mathbb{R}^n$, une tolérance ε pour la condition d'arrêt et des arguments supplémentaires que vous jugerez nécessaires et que vous définirez avant la fonction. Enfin cette fonction renverra le dernier itéré correspondant à la variable a.

13. Dans cette question uniquement on suppose $n = 2$. La trajectoire visible sur la figure 2 peut-elle correspondre à celle produite par l'algorithme de descente de gradient à pas optimal appliquée à F ? En plus de la justification, on en donnera une rapide preuve.

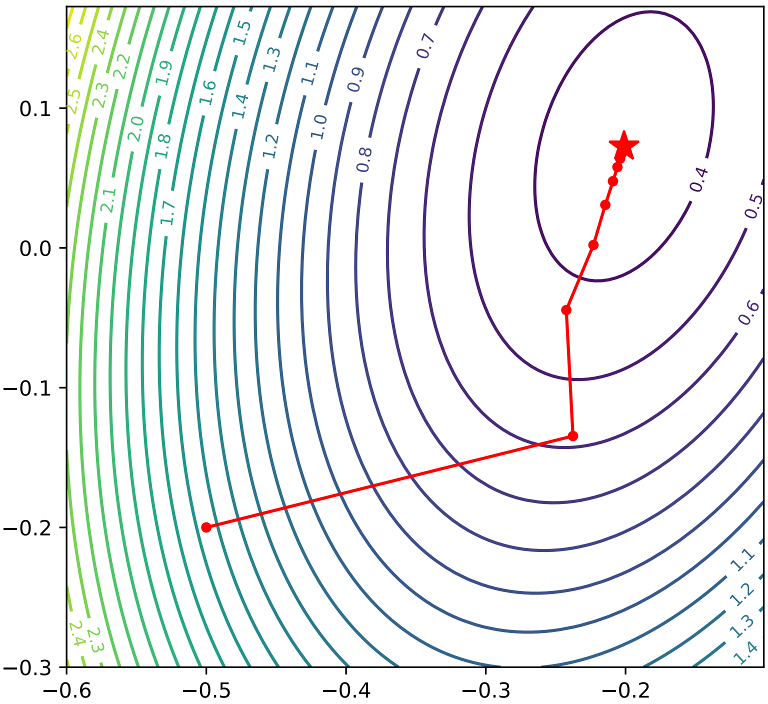

Figure 2. Les points correspondent aux éléments d'une suite $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, convergeant vers $a^\star_\lambda$ (représenté par l'étoile sur la figure), produite grâce à un algorithme itératif. Deux points reliés par un segment correspondent à deux itérés successifs de l'algorithme. Ainsi un segment donné a pour direction $a^{(k+1)} - a^{(k)}$, pour un certain $k \in \mathbb{N}$. En arrière plan sont représentées des lignes de niveau de F.

14. La figure 3 fournit une illustration de la convergence de l'algorithme de descente de gradient à pas optimal appliquée F. D'après le graphe, quelle type de convergence a-t-on pour la suite $(F(a^{(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$, où $(a^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des itérés produites par l'algorithme en démarrant $a^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

<u>Correction</u>.
0.75+0.5+0.75+(1.25+1.25)+0.75+0.5
0.5+(0.5+0.75)+0.5+1.25
0.25+1+2+1.25+0.75+0.5 bonus

1. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ tel que la quantité $\frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{M}(1-y_i\langle x_i,\, a\rangle)^2$ soit "petite". Alors pour tout $i \in \{1, \dots, M\}$, on a $y_i\langle x_i,\, a\rangle \simeq 1$, car on a une somme de termes positifs donc chacuns doit être "petits". Ainsi $\langle x_i,\, a\rangle \simeq y_i$, puisque $y_i \in \{-1, 1\}$. Donc les valeurs (notamment leurs signes) $f_a(x_i)$, pour $i \in \{1, \dots, M\}$, sont des bons prédicteurs des classes y_i des x_i (0.75pt).

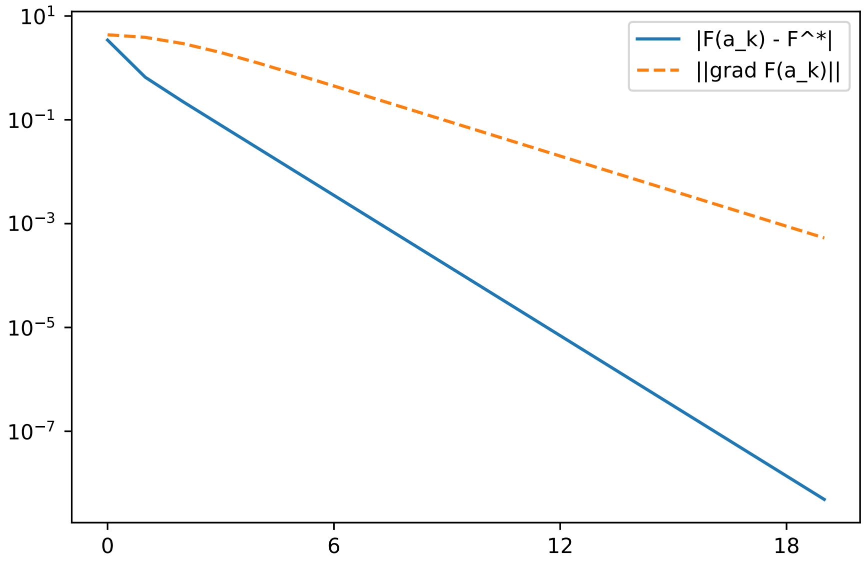

FIGURE 3. Illustration de la convergence de l'algorithme de descente de gradient à pas optimal appliquée à F.

2. F est $\mathcal{C}^\infty$ par somme et composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ (0.5pt).

3. On a pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $F(a) \geqslant \frac{\lambda}{2}\|a\|^2$, donc F est coercive sur $\mathbb{R}^n$. Comme F est continue, on déduit que F admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$ (0.75pt).

4. a) Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = (1-t)^2$ et tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $g_i : a \in \mathbb{R}^n \mapsto y_i \langle x_i, a\rangle$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $F(a) = \frac{1}{2M}\sum_{i=1}^M \varphi(g_i(a)) + \frac{\lambda}{2}\|a\|^2$. Comme φ et g_i sont $\mathcal{C}^\infty$, on a par la formule de la différentielle d'une composée, pour tous $a, h \in \mathbb{R}^n$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $d(\varphi \circ g_i)(a)(h) = \varphi'(g_i(a))dg_i(a)(h) = -2(1 - y_i\langle x_i, a\rangle)y_i\langle x_i, h\rangle$. Ainsi

$$dF(a)(h) = \left\langle -\frac{1}{M}\sum_{i=1}^M (1 - y_i\langle x_i, a\rangle)y_i x_i + \lambda a,\, h\right\rangle,$$

d'où par identification $\nabla F(a) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^M (y_i\langle x_i, a\rangle - 1)y_i x_i + \lambda a$ (1.25pt).

b) On a pour $a, h \in \mathbb{R}^n$, $\nabla F(a+h) = \nabla F(a) + \frac{1}{M}\sum_{i=1}^M y_i^2\langle x_i, h\rangle x_i + \lambda h$, donc $d(\nabla F)(a)(h) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^M y_i^2\langle x_i, h\rangle x_i + \lambda h$. Or pour tout i, $\langle x_i, h\rangle x_i = \underbrace{(x_i^T h)}_{\in\mathbb{R}} x_i = x_i(x_i^T h) = (x_i x_i^T)h$. Comme $y_i^2 = 1$, on obtient ainsi $d(\nabla F)(a)(h) = \left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^M x_i x_i^T + \lambda I_n\right)h$. D'où par identification, $\nabla^2 F(a) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^M x_i x_i^T + \lambda I_n$ (1.25pt).

5. a) Pour tout $i \in \{1, \dots, M\}$, la matrice $x_i x_i^T$ (de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) est symétrique positive, car pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $\langle x_i x_i^T h, h\rangle = (x_i^T h)^2 \geqslant 0$. Ainsi $\frac{1}{M}\sum_{i=1}^M x_i x_i^T \succeq 0$. Donc pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $\nabla^2 F(a) \succeq \lambda I_n \succ 0$ (0.5pt). Donc f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$ (0.25pt).

b) Comme f est strictement convexe, f admet donc au plus un minimum global, mais on sait qu'elle en admet au moins d'après la question 3.. On a donc $\arg\min_{a\in\mathbb{R}^n} F(a) = \{a_\lambda^\star\}$ (0.5pt).

6. G fonctionnelle quadratique si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $G(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle + c$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ (0.5pt).

7. a) Vue la définition de Z, on a pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $Z^T a = (y_i\langle x_i, a\rangle)_{1\leqslant i\leqslant M}$, donc $\left\|\mathbb{1} - Z^T a\right\|^2 = \sum_{i=1}^M (1 - y_i\langle x_i, a\rangle)^2$. On a donc bien $F(a) = \frac{1}{2M}\left\|\mathbb{1} - Z^T a\right\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|a\|^2$ (0.5pt).

> Notez que la première norme euclidienne est sur $\mathbb{R}^M$, alors que la seconde sur $\mathbb{R}^n$

b) On développe la norme euclidienne, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} F(a) &= \frac{1}{2M}\langle \mathbb{1},\, \mathbb{1}\rangle - \frac{1}{M}\langle \mathbb{1},\, Z^T a\rangle + \frac{1}{2M}\langle Z^T a,\, Z^T a\rangle + \frac{\lambda}{2}\langle a,\, a\rangle\,, \\ &= \frac{1}{2}\left\langle \left(\frac{1}{M}ZZ^T + \lambda I_n\right)a,\, a\right\rangle - \left\langle \frac{1}{M}Z\mathbb{1},\, a\right\rangle + \frac{1}{2},\ \text{(0.5}pt\text{)} \end{aligned}$$

où on a simplifié $\langle \mathbb{1},\, \mathbb{1}\rangle = M$. On a fonc bien F fonctionnelle quadratique comme $\frac{1}{M}ZZ^T + \lambda I_n$ est symétrique (0.25pt).

> Notez que dans la première ligne du calcul les produits scalaires sont définies sur $\mathbb{R}^M$, mais dans la seconde sur $\mathbb{R}^n$

8. On sait alors d'après le cours que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $\nabla F(a) = \left(\frac{1}{M}ZZ^T + \lambda I_n\right)a - \frac{1}{M}Z\mathbb{1}$ et $\nabla^2 F(a) = \frac{1}{M}ZZ^T + \lambda I_n$ (0.5pt).

> On peut vérifier facilement que ces expressions sont cohérentes avec les précédentes. Notez que $\nabla F(a)$ est bien un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $\nabla^2 F(a)$ une matrice de taille $n \times n$

9. On a vu que F admet un unique minimum global, noté $a^\star_\lambda$. On a donc $\nabla F(a^\star_\lambda) = 0$, i.e. $a^\star_\lambda = \frac{1}{M}\left(\frac{1}{M}ZZ^T + \lambda I_n\right)^{-1} Z\mathbb{1}$ (0.25pt)

> On sait même que $a^\star_\lambda$ est caractérisé [a] par l'équation $\nabla F(a^\star_\lambda) = 0$, puisque F est strictement convexe
>
> a. le minimum global de F est l'unique élément de $\mathbb{R}^n$ qui annule ∇F.

On a $a^\star_\lambda = \frac{1}{M}\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda M}ZZ^T + I_n\right)^{-1} Z\mathbb{1}$. Comme $\frac{1}{\lambda M}ZZ^T + I_n \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} I_n$ (convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), et comme l'application $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^{-1}$ est continue (sur l'ouvert $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), on a $\left(\frac{1}{\lambda M}ZZ^T + I_n\right)^{-1} \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} I_n$. Par conséquent $a^\star_\lambda \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (0.5pt).

Quand λ devient très grand, le terme le plus pénalisant dans F (et qui va donc être "minimisé" en priorité) est $\frac{\lambda}{2}\|a\|^2$. Or le minimum global de $a \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{\lambda}{2}\|a\|^2$ est 0. Il est donc logique que $a^\star_\lambda \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (0.5pt).

10. Comme F est une fonctionnelle quadratique, on sait que l'algorithme de descente de gradient à pas optimal est bien définie : pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique $t^\star > 0$ tel que $t^\star \in \arg\min_{t\in\mathbb{R}_+} F(a - t\nabla F(a))$ et on en a même une expression littérale (0.25pt).

11. On a F de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et on a vu que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $\nabla^2 F(a) \succeq \lambda I_n$ (F est λ-fortement convexe sur $\mathbb{R}^n$) (0.5pt). De plus comme $\nabla^2 F(a) = \frac{1}{M}ZZ^T + \lambda I_n$, c'est donc une matrice symétrique réelle définie positive et indépendante de a. Notant $M > 0$ sa plus grande valeur propre, on a donc pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $\nabla^2 F(a) \preceq MI_n$ (0.5pt). Ainsi F satisfait les hypothèses du théorème de convergence de l'algorithme de descente de gradient à pas optimal.

12. Voir cours.

0.5 : mise en forme globale du code Python,
0.25 : définition variables externes,
0.25 : initialisation de l'algorithme,
0.25 : condition d'arrêt,
0.25 : écriture itération nouveau a,
0.5 : cohérence logique de l'algorithme (ordre...),
0.5 : **bonus (hors barème)** si écriture algorithme avec un seul produit matriciel, cf TP.

13. On remarque sur la figure que la trajectoire affine par morceaux ne se fait pas avec des changements de pentes à angle droit : dit plus précisément, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a^{(k+1)} - a^{(k)}$ n'est pas orthogonal à $a^{(k+2)} - a^{(k+1)}$, i.e. $\left\langle \nabla F(a^{(k)}),\, \nabla F(a^{(k+1)})\right\rangle \neq 0$. Ce ne peut donc pas être une trajectoire produite par l'algorithme de descente de gradient à pas optimal qui satisfait nécessairement cette propriété d'orthogonalité (0.5pt).

En effet par définition du pas optimal, soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons $\nabla F(a^{(k)}) \neq 0$ (sinon $a^{(k)}$ est le minimum global de F et l'algorithme s'arrête), on a $t^{(k)} \in \arg\min_{t>0} F(a^{(k)} - t\nabla F(a^{(k)}))$, i.e. $t^{(k)}$ annule la dérivée de la fonction $g_k : t \in \mathbb{R}^*_+ \mapsto F(a^{(k)} - t\nabla F(a^{(k)}))$ (qui est bien dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$ par composée de fonction différentiable). Or pour tout $t > 0$, $g'(t) = -\left\langle \nabla F(a^{(k)} - t\nabla F(a^{(k)})),\, \nabla F(a^{(k)})\right\rangle$, d'où $\left\langle \nabla F(\underbrace{a^{(k)} - t^{(k)}\nabla F(a^{(k)})}_{a^{(k+1)}}),\, \nabla F(a^{(k)}) \right\rangle = 0$ (0.75pt).

14. D'après la figure, on remarque que $k \in \mathbb{N} \mapsto \log(|F(a^{(k)}) - F^\star|)$ est une fonction affine de pente négative à partir d'un certain rang, où $F^\star = \min_{\mathbb{R}^n} F$. Cela signifie que la convergence de $(F(a^{(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ vers $F^\star$ est linéaire (0.5pt). En effet, il existe $\sigma > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $k \geqslant k_0$, $\log(|F(a^{(k)}) - F^\star|) = -\sigma k + \beta$, ainsi $|F(a^{(k)}) - F^\star| = e^\beta \left(e^{-\sigma}\right)^k$, avec $0 < e^{-\sigma} < 1$ puisque $\sigma > 0$, ce qui correspond bien à la définition de la convergence linéaire (0.25pt).

Ceci est cohérent avec le théorème de convergence de l'algorithme.

Exercice 3 (7.75pt)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f une fonction $\mathcal{C}^2$ m-fortement convexe ($m > 0$) sur $\mathbb{R}^n$ muni de sa norme euclidienne notée $\|\cdot\|$. De plus, on suppose que ∇f est L-Lipschitzienne ($L > 0$), i.e. pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leqslant L\,\|x - y\|\,.$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\tau > 0$ fixé. On considère la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = F(x_k),$$

où pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $F(x) = x - \tau\nabla f(x)$. On veut trouver une condition sur $\tau > 0$ de sorte que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

1. Comment nommeriez-vous cette méthode produisant la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$?

2. Étudier la convexité de f et montrer que f admet un unique minimum global, noté $x^\star$, sur $\mathbb{R}^n$.

3. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y),\, x - y\rangle \geqslant m\,\|x - y\|^2\,.$$

4. a) En développant pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ la quantité $\|F(x) - F(y)\|^2$, en déduire que

$$\|F(x) - F(y)\|^2 \leqslant (1 + \tau^2 L^2 - 2m\tau)\,\|x - y\|^2\,.$$

   b) En déduire que si $0 < \tau < \frac{2m}{L^2}$, alors il existe $\cancel{0 < \alpha_\tau < 1}$ $0 \leqslant \alpha_\tau < 1$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leqslant \alpha_\tau\,\|x_k - x_{k-1}\|\,.$$

   On suppose $0 < \tau < \frac{2m}{L^2}$ dans la suite.

   c) En déduire que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge. On notera $\ell \in \mathbb{R}^n$ sa limite. *Indication : on cherchera à montrer que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. On pourra commencer par majorer pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $p \in \mathbb{N}^*$,* $\|x_{k+p} - x_k\|$.

5. Montrer que la convergence de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers ℓ est linéaire.

6. Montrer que $\ell = x^\star$.

7. a) Soit $x, h \in \mathbb{R}^n$. En considérant $\psi : t \in \mathbb{R} \mapsto \langle \nabla f(x + th),\, h\rangle$ et en faisant deux développements de Taylor bien choisis, déduire que $\left\langle \nabla^2 f(x)h,\, h\right\rangle \leqslant L\,\|h\|^2$.

   b) On pose $c = \frac{L}{m}$. Que représente cette quantité ?

   c) Trouver la valeur optimale de τ, que l'on exprimera en fonction de c, garantissant la convergence la plus rapide de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers $x^\star$. Commenter la vitesse de convergence de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ lorsque c se trouve successivement dans ses deux régimes extrêmes.

Correction.
0.5+1+0.75+(0.5+0.5+0.75)+0.5+0.75+(1.25+0.5+0.75)

1. On remarque que c'est une méthode de descente de gradient (0.25pt), mais dont le pas valant $\tau > 0$ est *fixe*. On peut donc l'appeler méthode de descente de gradient à pas fixe (0.25pt).

2. Comme f est m-fortement convexe et $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla^2 f(x) \succeq mI_n \succ 0$, i.e. f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$ (0.5pt). De plus on sait que la m-forte convexité de f implique sa coercivité, et comme f est continue sur $\mathbb{R}^n$, on déduit alors l'existence d'un minimum global sur $\mathbb{R}^n$, qui est donc unique par stricte convexité (0.5pt).

3. Comme $g = f - \frac{m}{2}\|\cdot\|^2$ est convexe, on a donc pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$
$$g(y) \geqslant g(x) + \langle \nabla g(x),\, y - x\rangle\,,$$
$$g(x) \geqslant g(y) + \langle \nabla g(y),\, x - y\rangle\,,$$
avec $\nabla g = \nabla f - m\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Ainsi en multipliant par -1 la première inégalité et en les sommant, on obtient
$$\langle \nabla g(x),\, x - y\rangle \geqslant \langle \nabla g(y),\, x - y\rangle\,,$$
i.e. $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y) - m(x-y),\, x - y\rangle \leqslant 0$, d'où l'inégalité souhaitée (0.75pt).

4. a) Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a
$$\begin{aligned}\|F(x) - F(y)\|^2 &= \|x - y - \tau(\nabla f(x) - \nabla f(y))\|^2\,,\\ &= \|x-y\|^2 + \tau^2\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2 - 2\tau\langle \nabla f(x) - \nabla f(y),\, x - y\rangle\,,\\ &\leqslant (1 + \tau^2L^2 - 2\tau m)\,\|x-y\|^2\,. \text{(0.5pt)}\end{aligned}$$

b) Posons $\kappa : \tau \in \mathbb{R}_+ \mapsto 1 + \tau^2L^2 - 2\tau m$. C'est une fonction polynomiale de degré 2, positive, de coefficient dominant $L^2 > 0$, et qui vaut 1 en 0 et en $\frac{2m}{L^2}$. Ainsi pour tout $\tau \in]0, \frac{2m}{L^2}[$, on a $0 \leqslant \kappa(\tau) < 1$, et en posant $\alpha_\tau = \sqrt{\kappa(\tau)} \in [0,1[$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\|x_{k+1} - x_k\| \leqslant \alpha_\tau\,\|x_k - x_{k-1}\|$ (0.5pt).

c) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, alors
$$\|x_{k+p} - x_k\| \leqslant \sum_{j=0}^{p-1}\|x_{k+j+1} - x_{k+j}\| \leqslant \sum_{j=0}^{p-1}\alpha_\tau^{k+j}\,\|x_1 - x_0\| = \alpha_\tau^k\,\|x_1 - x_0\|\,\frac{1-\alpha_\tau^p}{1-\alpha_\tau} \leqslant C_\tau\alpha_\tau^k,$$
avec $C_\tau = \frac{\|x_1 - x_0\|}{1-\alpha_\tau} \geqslant 0$ (0.5pt). Soit $\varepsilon > 0$, comme $\alpha_\tau \in [0,1[$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $k \geqslant k_0$ et $p \in \mathbb{N}^*$, $\|x_{k+p} - x_k\| \leqslant \varepsilon$, i.e. $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^n$ (complet) donc converge vers $\ell \in \mathbb{R}^n$ (0.25pt).

5. On a montré pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, $\|x_k - x_{k+p}\| \leqslant C_\tau\alpha_\tau^k$. En passant à la limite $p \to +\infty$ dans cette inégalité, on obtient $\|x_k - \ell\| \leqslant C_\tau\alpha_\tau^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge linéairement vers ℓ car $\alpha_\tau \in [0,1[$ (0.5pt).

6. Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} = F(x_k)$, par continuité de F (puisque f est $\mathcal{C}^2$), on obtient $\ell = F(\ell)$ en passant à la limite, d'où $\nabla f(\ell) = 0$. Or f admet un unique minimum global, qui est donc l'unique $x \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant $\nabla f(x) = 0$ comme f est (strictement) convexe. D'où $\ell = x^\star$ (0.75pt).

> Nous venons donc de montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, définie via la méthode de descente de gradient à pas fixe, converge vers l'unique minimum global de f, pourvu que le pas de descente est suffisamment petit (appartient à $]0, \frac{2m}{L^2}[$)

7. a) La fonction ψ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par composée de fonctions $\mathcal{C}^1$. Soit $t \in \mathbb{R}$, alors par la formule de Taylor-Young à l'ordre 2, on a $\psi(t) = \psi(0) + t\psi'(0) + o_{t\to 0}(t)$ et $\psi(-t) = \psi(0) - t\psi'(0) + o_{t\to 0}(t)$. Ainsi en faisant la différence de ces deux équations, on obtient $\langle \nabla f(x+th) - \nabla f(x-th),\, h\rangle = 2t\psi'(0) + o_{t\to 0}(t)$ (0.25pt). Or $\psi'(t) = \left\langle \nabla^2 f(x+th)h,\, h\right\rangle$ (0.5pt) et par hypothèse sur f et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\langle \nabla f(x+th) - \nabla f(x-th),\, h\rangle \leqslant \|\nabla f(x+th) - \nabla f(x-th)\|\,\|h\| \leqslant 2|t|\,\|h\|^2$. Ainsi on obtient
$$2t\left\langle \nabla^2 f(x)h,\, h\right\rangle + o_{t\to 0}(t) \leqslant 2|t|\,\|h\|^2\,. \text{(0.25pt)}$$
Par conséquent en supposant $t > 0$, en divisant par t et en faisant $t \to 0$, on obtient bien l'inégalité souhaitée (0.25pt).

> Détails du calcul de ψ'. Posons $\eta : u \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle u,\, h\rangle$ et $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \nabla f(x+th)$. Ce sont des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur leurs ensembles de définition et pour tout $u, v \in \mathbb{R}^n$, $d\eta(u)(v) = \langle v,\, h\rangle$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = d(\nabla f)(x+th)(h) = \nabla^2 f(x+th)h$. Ainsi par la formule de la différentielle d'une composée, comme $\psi = \eta \circ \varphi$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi'(t) = d\eta(\nabla f(x+th))(\varphi'(t)) = \left\langle \nabla^2 f(x+th)h,\, h\right\rangle$.

b) D'après la précédente question, on déduit que L est un majorant de l'ensemble des valeurs propres des $\nabla^2 f(x)$, pour $x \in \mathbb{R}^n$. Donc c s'apparente à un conditionnement et on a nécessairement $c \geqslant 1$ (0.5pt).

c) La fonction κ définie en 4.b) est minimale en $\tau = \frac{m}{L^2}$ et $\kappa\left(\frac{m}{L^2}\right) = 1 - (\frac{m}{L})^2 = 1 - \frac{1}{c^2}$. Ainsi pour ce pas de descente, la convergence est la plus rapide (0.25pt).

Lorsque $c \to 1$, c'est-à-dire les valeurs propres des $\nabla^2 f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ sont environ toutes égales, alors le taux de convergence linéaire $\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}}$, de la méthode, tend vers 0. La convergence devient superlinéaire. Lorsque $c \to +\infty$, i.e. le rapport entre $\sup\{\lambda : \exists x \in \mathbb{R}^n, \lambda \text{ vp de } \nabla^2 f(x)\} \leqslant L$ et $\inf\{\lambda : \exists x \in \mathbb{R}^n, \lambda \text{ vp de } \nabla^2 f(x)\} \geqslant m$ devient de plus en plus grand, alors le taux de convergence linéaire tend vers 1 : la convergence linéaire est de plus en plus lente (0.5pt).