Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

M1 MMA 2023-2024
Optimisation

Feuille de TD n°3

Problème d'optimisation et convexité.

Exercice 1

Soit D la droite de $\mathbb{R}^2$ caractérisée par $(x_1, x_2) \in D$ si et seulement si $x_2 = 0$. On considère le problème d'optimisation

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf_D f,$$

où pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 + 5$.

1. Justifier que f est une fonctionnelle quadratique. Déduire l'unique minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. a) Décrire les lignes de niveau de f.
   b) Conjecturer, à partir d'observations géométriques, l'ensemble des solutions du problème d'optimisation.
3. a) Déterminer la nature du problème d'optimisation $(\mathcal{P})$.
   b) Montrer que $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution.
   c) Donner une CNS pour que $x^\star = (x_1^\star, x_2^\star) \in D$ soit une solution de $(\mathcal{P})$. Identifier alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{P})$.

Exercice 2

Soit $p^{(1)} = (p_1^{(1)}, p_2^{(1)}), p^{(2)} = (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}), \ldots, p^{(n)} = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)})$, n points dans $\mathbb{R}^2$. Le but de cet exercice est de trouver le point qui minimise la somme des distances au carré à tous les points $p^{(i)}$. Ainsi, pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ nous définissons la fonctionnelle suivante

$$J(x) = \sum_{i=1}^{n} \left\| x - p^{(i)} \right\|^2.$$

1. Montrer que J admet un unique point critique $x^\star$ sur $\mathbb{R}^2$. Interpréter géométriquement ce point.
2. Montrer que $x^\star$ est l'unique minimum global de J.

Exercice 3 (Régression linéaire simple)

Soit $((x_i, y_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un n-uplet de points dans $\mathbb{R}^2$, avec $n \geqslant 2$. On suppose qu'au moins deux points x_i sont distincts.

La régression linéaire simple consiste à chercher la meilleure relation affine du type $y = \alpha x + \beta$ qui relie l'*entrée* x_i à la *sortie* y_i, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ceci s'obtient en s'intéressant au problème d'optimisation

$$\inf_{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2} J(\alpha, \beta),$$

où pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $J(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta - y_i)^2$.

Montrer que J admet un minimiseur global unique et le calculer.

Exercice 4 (Modèle linéaire)

Soit $((x_i, y_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un n-uplet de points de $\mathbb{R}^2$. On va chercher une manière optimal de représenter la sortie y_i en fonction de l'entrée x_i, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, via le modèle défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\beta(x) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j w_j(x),$$

où $k \in \mathbb{N}$, et les $w_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données, et les $\beta_j \in \mathbb{R}$ sont les paramètres cherchés. On s'intéresse au problème d'optimisation

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf_{\beta \in \mathbb{R}^{k+1}} J(\beta),$$

où pour tout $\beta \in \mathbb{R}^{k+1}$, $J(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \left(f_\beta(x_i) - y_i\right)^2$. On supposera que $n \geqslant k+1$.

1. Montrer que l'on peut écrire

$$\forall \beta \in \mathbb{R}^{k+1}, \quad J(\beta) = \|M\beta - y\|^2 .$$

où $y = (y_1, \cdots, y_n)$, et M est une matrice à définir.

2. Montrer que $\beta \in \mathbb{R}^{k+1}$ est un point critique de J si et seulement si $M^T M\beta = M^T y$.

3. Montrer que si M est de rang maximal, alors la solution du problème $(\mathcal{P})$ est unique.