Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

M1 MMA 2023-2024
Optimisation

Feuille de TD n°2

Points extrémaux.

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 6(x_1^2 - x_2^2).$$

1. Montrer que f admet quatre points critiques.
2. Représenter à l'ordinateur f au voisinage de ses points critiques. Préciser la nature des points critiques (maximum local, minimum local, point col) d'après les observations.
3. Calculer pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(0,t)$ et $f(t,0)$ et dire si f admet un extremum en $(0,0)$.
4. Pour les trois autres points critiques, calculer la hessienne de f en ces points et conclure sur leur nature.

Correction.

1. f est $\mathcal{C}^\infty$ car polynomiale en ses coefficients. On calcule le gradient de f via ses dérivées partielles, on obtient pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x_1, x_2) = (3x_1^2 - 12x_1, 3x_2^2 + 12x_2)$. Les points critiques (qui annulent le gradient) sont donc $(0,0)$, $(0,-4)$, $(4,0)$, $(4,-4)$.
2. Question de code.
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(0,t) = t^3 + 6t^2 \sim_{t\to 0} 6t^2$, et $f(t,0) = t^3 - 6t^2 \sim_{t\to 0} -6t^2$. Par conséquent $(0,0)$ ne peut être un minimum local ni un maximum local. D'après ces équivalents, on déduit que $x_2 \mapsto f(0,x_2)$ admet un minimum local en 0 et $x_1 \mapsto f(x_1,0)$ admet un maximium local en 0. Ainsi $(0,0)$ est un point col.
4. La matrice hessienne de f en tout point $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ est diagonale, de diagonale $(6x_1 - 12, 6x_2 + 12)$. Ainsi en $(0,-4)$, elle a une valeur propre double : -12. Donc $\nabla^2 f(0,-4)$ est définie négative et $(0,-4)$ est un maximum local. En $(4,0)$, elle a une valeur propre double : 12. Donc $\nabla^2 f(0,-4)$ est définie positive et $(4,0)$ est un minimum local. Enfin en $(4,-4)$, elle a pour valeurs propres : 12 et -12. Donc $(4,-4)$ est un point col.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3.$$

Déterminer ses points critiques. Admet-elle des extrema locaux ? Globaux ?

Correction.
f est $\mathcal{C}^\infty$ car polynomiale en ses coefficients. On calcule le gradient de f via ses dérivées partielles, on obtient pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1, 3x_2^2)$. Donc f admet un unique point critique : $(0,0)$. Ce point n'est ni un maximum local ni un minimum local de f car 0 n'en est pas un pour $t \mapsto f(0,t) = t^3$. $(0,0)$ n'est donc pas non plus un point col. Comme f n'admet pas d'extrema locaux, elle n'admet pas de minimums ou maximums globaux.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1 x_2^2.$$

1. Montrer que f admet un unique point critique en $(0,0)$.
2. Préciser la nature de ce point critique.

3. Réprésenter à l'ordinateur f au voisinage de $(0,0)$, confirmer par l'observation ce qui a été démontré à la précédente question.
4. Montrer que f est convexe sur le segment reliant les points $(0,1)$ et $(1,1)$.
5. On admet que f est positivement homogène de degré 3, i.e. pour tout $t \geqslant 0$, tout $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f(t(x_1,x_2)) = t^3 f(x_1,x_2)$, et que pour tout $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2) = \mathrm{Re}\left((x_1+ix_2)^3\right)$ [1].

   On rappelle que pour tout $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, il existe un unique $t > 0$ et $\theta \in [0,2\pi[$ tel que $(x_1,x_2) = t(\cos(\theta)\sin(\theta))$.

   Montrer que l'on peut partitionner $\mathbb{R}^2$ en 6 zones égales séparées par des demi-droites partant de l'origine, et dans lesquelles on a alternativement f qui tend vers $+\infty$ puis f qui tend vers $-\infty$ quand $\|(x_1,x_2)\| \to +\infty$.
6. Représenter $f_k : (x_1,x_2) \mapsto Re\left((x_1+ix_2)^k\right)$, pour $k \geqslant 2$ et observer le nombre de zones.

Correction.

1. f est $\mathcal{C}^\infty$ car polynomiale en ses coefficients. On calcule le gradient de f via ses dérivées partielles, on obtient pour tout $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x_1,x_2) = (3x_1^2 - 3x_2^2, -6x_1x_2)$. Ainsi seul $(0,0)$ annule ∇f.
2. La matrice hessienne de f en $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ est
$$\nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 6x_1 & -6x_2 \\ -6x_2 & -6x_1 \end{pmatrix}.$$
   On remarque donc que $\nabla^2 f(0,0)$ est la matrice nulle. On ne peut donc rien dire à partir de celle ci concernant la nature de $(0,0)$.

   Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t,0) = t^3$, donc $(0,0)$ ne peut être un minimum local, ni un maximum local, ni un point col.
3. Question de code.
4. Notons C le segment (c'est un convexe) reliant les points $(0,1)$ à $(1,1)$, on a donc $C = \{(1-t)(0,0) + t(1,1)/t \in [0,1]\} = \{(t,1)/t \in [0,1]\}$. Pour montrer que f est convexe sur U il suffit de vérifier que pour tout $x,y \in U$, on a $\left\langle \nabla^2 f(x)(y-x),\, y-x \right\rangle \geqslant 0$.

   Soit donc $x,y \in C$, ainsi il existe $t,t' \in [0,1]$ tels que $x = (t,1)$ et $y = (t',1)$. On a donc $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 6t & -6 \\ -6 & -6t \end{pmatrix}$, $y - x = (t'-t, 0)$, donc $\left\langle \nabla^2 f(x)(y-x),\, y-x \right\rangle = 6t(t'-t)^2 \geqslant 0$ car $t \geqslant 0$. D'où f est convexe sur C.

   Pour illustrer la cohérence du théorème général évoqué au dessus pour montrer la convexité de f sur un convexe, on peut étudier ici la convexité de f de manière plus classique puisque on peut paramétriser les valeurs de f sur C par une variable réelle. Posons $g : t \in [0,1] \mapsto t^3 - 3t$, alors pour tout $(t,1) \in C$, on a $g(t) = f(t,1)$. Ainsi f est convexe sur C si et seulement si $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est convexe sur $[0,1]$. Or pour tout $t \in [0,1]$, $g''(t) = 6t \geqslant 0$, comme $t \geqslant 0$. On retrouve donc bien le résultat.
5. On vérifie directement les deux propriétés par le calcul.

   Soit $\theta \in [0,2\pi[$, alors $f(\cos(\theta),\sin(\theta)) = \mathrm{Re}(e^{i3\theta}) = \cos(3\theta)$. Ainsi pour $\theta \in]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}[$, $\theta \in \frac{2\pi}{3} +]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}[$ et $\theta \in \frac{4\pi}{3} +]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}[$, on a $f(\cos(\theta),\sin(\theta)) < 0$ et donc pour $t \geqslant 0$, $f(t(\cos(\theta),\sin(\theta))) = tf(\cos(\theta),\sin(\theta)) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Or pour tout $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, il existe un unique $\theta \in [0,2\pi[$ et $t > 0$ tels que $(x_1,x_2) = t(\cos(\theta),\sin(\theta))$. D'où il y a trois régions du plan, qui correspondent aux angles $\theta \in]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}[$, $\theta \in \frac{2\pi}{3} +]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}[$ et $\theta \in \frac{4\pi}{3} +]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}[$, où f tend vers $-\infty$.

   Ces zones délimitent trois zones où cette fois f tend vers $+\infty$. À la frontière de ces zones, donc sur des demi-droites partant de $(0,0)$ correspondant aux angles $\theta \in [0,2\pi[$ qui annulent $\cos(3\theta)$, f est nulle.
6. Soit $k \geqslant 2$. Par un raisonnement identique à celui de la question précédente, on observe que f_k admet k zones où f tend vers $-\infty$ quand $\|(x_1,x_2)\| \to +\infty$, séparées de k zones où cette fois f tend vers $+\infty$ quand $\|(x_1,x_2)\| \to +\infty$.

---

1. On peut le vérifier facilement par le calcul.