Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

M1 MMA 2023-2024
Optimisation

Feuille de TD n°2

Points extrémaux.

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 6(x_1^2 - x_2^2).$$

1. Montrer que f admet quatre points critiques.
2. Représenter à l'ordinateur f au voisinage de ses points critiques. Préciser la nature des points critiques (maximum local, minimum local, point col) d'après les observations.
3. Calculer pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(0, t)$ et $f(t, 0)$ et dire si f admet un extremum en $(0, 0)$.
4. Pour les trois autres points critiques, calculer la hessienne de f en ces points et conclure sur leur nature.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3.$$

Déterminer ses points critiques. Admet-elle des extrema locaux ? Globaux ?

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1x_2^2.$$

1. Montrer que f admet un unique point critique en $(0, 0)$.
2. Préciser la nature de ce point critique.
3. Réprésenter à l'ordinateur f au voisinage de $(0, 0)$, confirmer par l'observation ce qui a été démontré à la précédente question.
4. Montrer que f est convexe sur le segment reliant les points $(0, 1)$ et $(1, 1)$.
5. On admet que f est positivement homogène de degré 3, i.e. pour tout $t \geqslant 0$, tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f(t(x_1, x_2)) = t^3 f(x_1, x_2)$, et que pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = \mathrm{Re}\left((x_1 + ix_2)^3\right)$ [1].

   On rappelle que pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, il existe un unique $t > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $(x_1, x_2) = t(\cos(\theta)\sin(\theta))$.

   Montrer que l'on peut partitionner $\mathbb{R}^2$ en 6 zones égales séparées par des demi-droites partant de l'origine, et dans lesquelles on a alternativement f qui tend vers $+\infty$ puis f qui tend vers $-\infty$ quand $\|(x_1, x_2)\| \to +\infty$.
6. Représenter $f_k : (x_1, x_2) \mapsto Re\left((x_1 + ix_2)^k\right)$, pour $k \geqslant 2$ et observer le nombre de zones.

1. On peut le vérifier facilement par le calcul.