

Optimisation

Université Paris Cité 2025-2026
M1 MMAS

Quentin Denoyelle & Camille Pouchol

1	Compléments sur la chapitre 1	1
1.1	Suite minimisante	1
1.2	Coercivité et problème bien posé	2

1 Compléments sur la chapitre 1

1.1 Suite minimisante

Notons $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ avec $D_f \subset \mathbb{R}^n$ et $D \subset D_f$.

En cours il a été affirmé que pour assurer l'existence d'une suite minimisante il fallait supposer que $\inf_D f > -\infty$. Ce n'est pas le cas ! Voici la proposition qui détaille la chose.

Proposition 1.1

Supposons que D est non vide. Alors il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\inf_D f \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée suite minimisante du problème d'optimisation $\inf_D f$.

Démonstration : Si $\inf_D f = \inf\{f(x), x \in D\} > -\infty$. Notons m cet infimum. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors par la caractérisation de la borne inférieure, il existe $y_n \in \{f(x), x \in D\}$ tel que $m \leq y_n < m + \frac{1}{n+1}$, soit encore il existe $x_n \in D$ tel que $m \leq f(x_n) < m + \frac{1}{n+1}$. On a ainsi construit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq f(x_n) < m + \frac{1}{n+1}$, et par conséquent $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers m . C'est le cas que nous avons vu en classe !

Supposons maintenant que $\inf_D f = -\infty$. C'est équivalent à dire que f n'est pas minorée sur D , puisque si c'était le cas, comme D est non vide, l'ensemble $\{f(x), x \in D\}$ serait non vide et minorée donc admettrait une borne inférieure (finie) par la propriété de la borne inférieure. Soit $n \in \mathbb{N}$, comme f n'est pas minorée sur D , il existe $x_n \in D$ tel que $f(x_n) < -n$. On construit ainsi une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) < -n$ et par conséquent $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$. ■

Exemple. Considérons le problème $\inf_{\mathbb{R}_+^*} f$ où $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(x)$. Alors l'infimum vaut $-\infty$ et une suite minimisante est par exemple la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_n = e^{-n}$.

Considérons maintenant $\inf_{\mathbb{R}} f$ où $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x}$, alors l'infimum vaut 0 et une suite minimisante est par exemple $(\ln(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$.

1.2 Coercivité et problème bien posé

Pour $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ avec $D \subset D_f \subset \mathbb{R}^n$, la définition vue de la coercivité de f sur D est la suivante

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists R > 0, \forall x \in D, \|x\|_2 > R \implies f(x) \geq A. \quad (1.1)$$

Vous conviendrez que remplacer le dernier $\geq$ par $>$ ne change pas le sens de la définition. Par contre, comme vous allez le voir, ce changement réduit grandement la rédaction de la preuve du théorème suivant d'existence d'une solution de $\inf_D f$.

Théorème 1.2

Supposons que D est fermé non vide. Puis que f est continue et coercive sur D . Alors le problème $\inf_D f$ est bien posé.

Démonstration : Soit $x_0 \in D$ (qui existe bien puisque D est non vide). Par coercivité de f , il existe $R > 0$ tel que pour tout $x \in D$, si $\|x\|_2 > R$ alors $f(x) > f(x_0)$. Ainsi $\{x \in D, f(x) \leq f(x_0)\} \subset D \cap \overline{B}(0, R) = D_R$, en particulier $x_0 \in D_R$ et D_R est non vide.

De plus D_R est fermé (comme intersection de fermés), borné donc compact. La fonction f étant continue sur D , elle l'est sur D_R et donc elle est bornée et atteint ses bornes sur D_R . Notons alors $x_1 \in D_R$ tel que pour tout $x \in D_R$, on a $f(x) \geq f(x_1)$. En particulier, comme $x_0 \in D_R$, $f(x_0) \geq f(x_1)$.

Soit $x \in D$. Si $x \in D_R$, alors $f(x) \geq f(x_1)$. Sinon $\|x\|_2 > R$, et donc $f(x) > f(x_0) \geq f(x_1)$. Dans tous les cas, $f(x) \geq f(x_1)$ avec $x_1 \in D_R \subset D$, donc par conséquent $\inf_D f \geq f(x_1) > -\infty$ et $x_1 \in \operatorname{argmin}_D f$. Le problème est bien posé! ■

L'utilisation de $>$ dans la définition au lieu de $\geq$ permet d'avoir directement que D_R est non vide puisque on obtient $x_0 \in D_R$. Plus besoin donc de considérer si D_R est vide ou non. Et enfin comme $x_0 \in D_R$, on a directement la comparaison $f(x_0) \geq f(x_1)$, alors que sous la définition (1.1), il fallait considérer les deux situations : $f(x_0) \geq f(x_1)$ et $f(x_1) \geq f(x_0)$ (puisque x_0 n'était pas forcément dans D_R).

Nous continuerons cependant d'utiliser dans la suite du cours la définition (1.1).

Concernant la démonstration "séquentielle" du théorème 1.2, l'existence systématique d'une suite minimisante vue dans la section précédente rend la démonstration relativement rapide, effective et sans devoir réutiliser des arguments spécifiques à la preuve précédente. La voici!

Démonstration : Comme l'ensemble D est non vide, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D telle que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\inf_D f$. Si par l'absurde $\|x_n\|_2 \rightarrow +\infty$, alors comme f est coercive sur D , on aurait $f(x_n) \rightarrow +\infty$. Ceci est contradictoire avec le fait que $\inf_D f \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Par conséquent il existe une sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est bornée. Notons là $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$.

Grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut donc en extraire une sous-suite qui converge. Notons ψ l'extractrice et $x_1 \in \mathbb{R}^n$ la limite. Comme D est fermé et $(x_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de D convergeant vers x_1 , on a par caractérisation séquentielle des fermés que $x_1 \in D$.

Comme f est continue sur D , elle l'est en x_1 et par la caractérisation séquentielle de la continuité, on obtient $f(x_{\varphi \circ \psi(n)}) \rightarrow f(x_1)$. Mais $(f(x_{\varphi \circ \psi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous suite de $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\inf_D f$. Par unicité de la limite, on obtient $f(x_1) = \inf_D f$. Par conséquent $\inf_D f \geq f(x_1) > -\infty$ et $x_1 \in \operatorname{argmin}_D f$. Le problème est bien posé! ■