TP1 : visualisation de fonctions de plusieurs variables

Contexte

L'objectif de ce TP est d'apprendre à visualiser de manière pertinente les fonctions de plusieurs variables, et de développer de l'intuition quant aux outils vus en cours pour en analyser le comportement local (gradient, hessienne, formules de Taylor associées, etc).

1 Fonction quadratique

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 + x_1 - 3x_2 + 30.$$

1. Écrire une fonction `f` correspondant à la fonction f.
2. Expliciter $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle + c.$$

3. Écrire deux fonctions `df1` et `df2` qui calculent les dérivées partielles $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ de f, puis une fonction `gradf` qui calcule le gradient $\nabla f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la fonction f.

2 Lignes de niveau et champ de gradient

1. Décrire le fonctionnement de la fonction `np.meshgrid` en s'appuyant sur des exemples simples. *On pourra s'aider de la documentation en ligne.*
2. Visualiser les lignes de niveau de la fonction f sur $[-5, 5]\times[-5, 5]$ à l'aide de la fonction `ligne_niv` déjà implémentée.
3. Ajouter alors aux lignes de niveau de la question précédente le champ de vecteurs donné par le gradient de la fonction f, à l'aide de la fonction `plt.quiver`. Qu'observe-t-on ?

3 Graphe et approximation affine

On rappelle que le graphe la fonction f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\left\{(x, f(x)),\ x \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

1. Visualiser le graphe de la fonction en se restreignant au même sous-ensemble $[-5, 5] \times [-5, 5]$ que précédemment.
2. Définir une fonction `lin_f` qui prend en entrée un vecteur x et y associe la meilleure approximation affine de f à son voisinage. Superposer au graphe précédent celui de la meilleure approximation affine de f au voisinage de différents points $x \in [-5, 5] \times [-5, 5]$.

4 Fonction plus tarabiscotée

On souhaite visualiser une fonction un peu plus évoluée, j'ai nommé $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x) = 1 + (1 - x_1^2 - 2x_2^3)\, e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}.$$

1. Coder la fonction et en visualiser les lignes de niveau et le graphe sur $[-3, 3] \times [-3, 3]$.
2. Déterminer les dérivées partielles première et seconde $\partial_1 g, \partial_2 g, \partial_{11} g, \partial_{12} g, \partial_{22} g$ et coder les fonctions correspondantes. Coder alors également les fonctions gradient $\nabla g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et hessienne $\nabla^2 f : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, via des fonctions `gradg` et `hessg`, respectivement.
On pourra s'aider du site WolframAlpha pour s'éviter de fastidieux calculs.
3. Définir une fonction `quad_g` qui à un vecteur x associe la meilleure approximation **quadratique** de g à son voisinage. Superposer alors au graphe de g celui de la meilleure approximation quadratique en différents points $x \in [-3, 3] \times [-3, 3]$.
Si besoin, on restreindra l'ensemble sur lequel sont tracés les graphes pour y voir plus clair.
4. Combien de points critiques la fonction f semble-t-elle avoir ? Si le temps le permet, calculer rigoureusement le nombre de points critiques de f, et discuter par le biais d'arguments théoriques et/ou d'investigations numériques la nature de chacun de ces points (extremum local, point-selle).

5 Premier contact avec la descente de gradient (à pas fixe)

Pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda > 0$, la descente de gradient à pas fixe λ appliquée à une fonction différentiable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est définie par la suite de valeur initiale x_0 et satisfaisant la récurrence

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \nabla f(x_k).$$

L'objectif d'un tel algorithme est la convergence de la suite (x_k) vers des éventuels minimiseurs de la fonction f sur $\mathbb{R}^n$.

La fonction `descente_gradient` implémente la descente de gradient à pas fixe, la récurrence étant interrompue à un entier choisi par l'utilisateur, et la fonction `plot_traj_descente` permet de visualiser les points obtenus en superposition des lignes de niveau de la fonction, ainsi que de son champ de gradient.

1. Observez la convergence de l'algorithme lorsqu'il est appliqué à la fonction f du début du TD, si le pas λ est choisi suffisamment petit.
2. Étudier empiriquement la convergence de l'algorithme lorsqu'il est appliqué à la fonction g, en faisant varier $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et le pas $\lambda > 0$.