

Optimisation - TD

1 Rappels de calcul différentiel	1
2 Problèmes d'optimisation : existence, unicité et caractérisation de solutions	3

1 Rappels de calcul différentiel

Exercice 1 (*Échauffement*)

1. Discuter de l'assertion suivante : $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si il existe $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tel que pour tous $x \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}^n$, $f(x+h) = f(x) + \varphi(h) + o(h)$.
2. Exprimer le gradient de l'application $\log$ en un point $x > 0$.
3. On se donne $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux applications différentiables (sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$, respectivement). Justifier que $t \mapsto \varphi(u(t))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une formule pour sa dérivée à partir de $\nabla\varphi$ et u' .
4. Montrer que l'application $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et donner sa différentielle. Est-elle différentiable en 0 ?
On pourra écrire $\|\cdot\|$ comme la composition de deux applications plus agréables à manipuler.
5. Déterminer la différentielle de l'application $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \mapsto AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On pourra munir $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme matricielle pour se simplifier la vie, et $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ de la norme produit usuelle associée.

Exercice 2 (*Vers une interprétation géométrique du gradient*)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, par $f(x) = \|Ax\|_2^2$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la régularité de la fonction f ?
2. Pour tous $x \in \mathbb{R}^2$, $h \in \mathbb{R}^2$, déterminer $df(x)(h)$, puis $\nabla f(x)$.
3. Pour tous $x \in \mathbb{R}^2$, $h, k \in \mathbb{R}^2$, déterminer $d^2f(x)(h, k)$, puis $\nabla^2 f(x)$.
4. (a) Représenter graphiquement l'ensemble $L_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = 1\}$, appelé ensemble de niveau 1 de f .
(b) Choisissez $x \in L_1$ et représenter le vecteur $\nabla f(x)$ en ce point. Que remarquez-vous ?

Exercice 3

On fixe $\delta > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. On définit

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad J_\delta(x) = \sum_{i=2}^{n-1} N_\delta(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i), \quad \text{où} \quad N_\delta(t) = \sqrt{\delta + t^2}.$$

On pourra dans tout l'exo utiliser les fonctions dérivées N'_δ dans N''_δ sans nécessairement en faire le calcul explicite.

1. Justifier que J_δ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, puis donner une expression de $dJ_\delta(x)(h)$ pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$.
2. Montrer que J_δ peut s'écrire sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad J_\delta(x) = \sum_{i=2}^{n-1} N_\delta(A_i x),$$

avec des matrices A_i , $i \in \{2, \dots, n-1\}$, que l'on explicitera. Réécrire la différentielle grâce aux A_i , et en déduire le gradient et la hessienne de J_δ en tout point $x \in \mathbb{R}^n$.

3. Donner une expression de $d^2 J_\delta(x)(h, k)$ pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $(h, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, à l'aide des A_i .

Exercice 4

Soient $N, M \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction

$$J_\lambda : \alpha \in \mathbb{R}^N \mapsto \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(1 + e^{-y_i \langle \alpha, x_i \rangle}) + \lambda \|L\alpha\|^2,$$

où $\lambda > 0$, $L \in \mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{R})$ et les x_i, y_i , pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, sont des éléments fixés.

1. Donner la nature des éléments x_i, y_i , $i \in \{1, \dots, n\}$. Sur quel espace est définie la norme euclidienne utilisée dans l'expression de J_λ ?
2. Donner une expression du gradient et de la hessienne de J_λ après avoir préalablement justifié qu'elle est deux fois continûment différentiable.

On pourra introduire des notations adéquates comme dans l'Exercice 3 pour se faciliter la tâche.

Exercice 5 (Formalisation de l'interprétation géométrique du gradient)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $L_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^2, f(x) = \lambda\}$ la ligne de niveau λ de f .

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que $\nabla f(x_0) \neq 0$ et notons $\lambda_0 = f(x_0)$. On se donne $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^2$, pour un certain $\varepsilon > 0$, une fonction de classe C^1 telle que $\gamma(0) = x_0$.

1. Quelle condition doit satisfaire $\gamma'(0)$ pour que $f \circ \gamma$ décroisse le plus vite au voisinage de 0?
2. On suppose maintenant que $f \circ \gamma$ est constante (à λ_0 , donc). Démontrer que $\nabla f(x_0)$ est orthogonale au vecteur $\gamma'(0)$, i.e. à la tangente à la ligne de niveau L_{λ_0} en x_0 .
3. On suppose que $\gamma'(0) = \nabla f(x_0)$. Montrer alors qu'il existe une fonction $\xi : \lambda \mapsto \xi(\lambda) \in \mathbb{R}^2$ définie sur un voisinage de λ_0 , de classe C^1 et telle que $\xi(\lambda) \in L_\lambda$. En déduire un équivalent de $\|\xi(\lambda) - x_0\|$ lorsque $\lambda \rightarrow \lambda_0$. Interpréter.

2 Problèmes d'optimisation : existence, unicité et caractérisation de solutions

Exercice 1

Discuter du caractère bien posé du problème de minimisation associé à l'application $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ considérée.

1. $f : (x_1, x_2) \mapsto e^{-\|(x_1, x_2)\|}$ avec $D = \mathbb{R}^2$, puis $D = \overline{B}(0, 1)$, puis $D = B(0, 1)$.
2. $f : (x_1, x_2) \mapsto x_1^3 + x_2^2 - 2x_2$ avec $D = \mathbb{R}^2$, puis $D = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto \cos(\|x\|^2)$ avec $D = \mathbb{R}^d$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 6(x_1^2 - x_2^2).$$

1. Le problème min. f (sans contraintes, donc) est-il bien posé? Donner sans preuve un ensemble D non borné sur lequel le problème de minimisation de f est bien posé.
2. Montrer que f admet quatre points critiques.
3. Représenter sur ordinateur f au voisinage de ses points critiques. Préciser la nature des points critiques (maximum local, minimum local, point col) d'après les observations.
4. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $f(0, t)$ et $f(t, 0)$ et dire si f admet un extremum local en $(0, 0)$.
5. Pour les trois autres points critiques, calculer la hessienne de f en ces points et conclure quant à leur nature.

Exercice 3

Soient $p_1, \dots, p_k$, k points distincts dans $\mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est de trouver le point qui minimise la somme des distances au carré à tous les points p_i . Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on définit alors

$$J(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \|x - p_i\|^2.$$

1. Montrer que J admet un unique point critique x^* sur $\mathbb{R}^n$. En donner une formule explicite ainsi qu'une interprétation géométrique.
2. Montrer que x^* est l'unique minimum global de J .

On se donne $1 < p < +\infty$ et on s'intéresse désormais au cas plus général consistant à minimiser sur $\mathbb{R}^n$ la fonction J_p définie

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad J_p(x) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^k \|x - p_i\|_p^p.$$

3. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{p} \|x\|_p^p$ est de classe C^1 et strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$.
On pourra étudier la fonction $z \mapsto \frac{1}{p} |z|^p$ sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que J_p admet un unique minimiseur global x^* , et donner l'équation qu'il doit satisfaire.

Exercice 4

Soit D la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x_2 = 0$. On considère le problème d'optimisation

$$\begin{array}{ll} \min. & f(x) \\ \text{s.c.} & x \in D, \end{array} \quad (\text{P})$$

où pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 + 5$.

1. Justifier que f admet un unique minimiseur global sur $\mathbb{R}^2$.
2.
 - (a) Décrire les lignes de niveau de f .
 - (b) Conjecturer, à partir d'observations géométriques, l'ensemble des solutions du problème d'optimisation.
3.
 - (a) Montrer que (P) est bien posé.
 - (b) Montrer que $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in D$ est solution de (P) si et seulement si $\nabla f(x^*) \in D^\perp$. Identifier alors l'ensemble des solutions de (P).