

Polycopié du cours :

**TRANSFORMÉE DE FOURIER ET
APPLICATIONS**

Edoardo Provenzi, Camille Sutour, Eric Luçon, Quentin Denoyelle

2022 - 2023

Table des matières

1	Les résultats fondamentaux des espaces vectoriels complexes avec produit scalaire	8
1.1	Espaces vectoriels réels et complexes avec produit scalaire	8
1.2	Norme et distance associées à un produit scalaire	11
1.3	Familles orthogonales et orthonormales dans des espaces vectoriels avec produit scalaire	12
1.3.1	Définitions	12
1.3.2	Orthogonalité et indépendance linéaire	13
1.3.3	Notion de projection orthogonale	15
1.3.4	Existence d'une base orthonormale : la procédure itérative de Gram-Schmidt	17
1.3.5	Les propriétés fondamentales d'une base orthonormale et orthogonale	18
1.4	Opérateurs entre espaces vectoriels avec produit scalaire : leurs propriétés et leur représentation matricielle	19
1.4.1	Rappels sur les opérateurs linéaires et matrices	20
1.4.2	Formules de changement de bases	22
1.5	Opérateurs qui conservent le produit scalaire	24
1.6	Valeurs et vecteurs propres d'un opérateur linéaire qui conserve le produit scalaire et matrices unitaires	25
1.6.1	Le cas réel	26
1.7	Rappel sur la diagonalisation des endomorphismes et matrices	27
2	La transformée de Fourier discrète	28
2.1	L'espace des suites complexes N -périodiques	28
2.1.1	La base orthogonale des exponentielles complexes de ℓ_N	29
2.2	La base orthonormale de Fourier de ℓ_N	32
2.2.1	Définition	32
2.2.2	Conséquences	33
2.2.3	Autre choix de renormalisation	33
2.3	Les coefficients de Fourier et la transformée de Fourier discrète (DFT)	34
2.3.1	Transformée de Fourier discrète	34
2.3.2	La transformée de Fourier inverse (IDFT)	35
2.3.3	La base (orthonormale) de Fourier réelle	37
2.4	Interprétation matricielle de la DFT et IDFT	38
2.4.1	« FFT » : Fast Fourier Transform	40
2.5	La transformée de Fourier dans le traitement des signaux	40

2.5.1	La formule de synthèse des signaux 1D : décomposition sur la base des harmoniques	41
2.5.2	Signification des coefficients de Fourier et spectre d'un signal 1D	42
2.5.3	Hautes et basses fréquences m dans la formule de synthèse	43
2.5.4	Visualisation du spectre d'amplitude	47
2.5.5	Filtrage de signaux dans la représentation fréquentielle	48
2.5.6	L'opérateur de multiplication et sa représentation matricielle diagonale .	48
2.5.7	Le multiplicateur de Fourier et l'égalisateur graphique	49
2.6	Propriétés de la DFT	50
2.6.1	DFT et translation	52
2.6.2	DFT et conjugaison	55
2.6.3	DFT et convolution	55
2.7	La DFT et les opérateurs stationnaires	59
2.7.1	La DFT et la diagonalisation des opérateurs stationnaires	61
2.7.2	Matrices circulantes	63
2.7.3	La caractérisation exhaustive des opérateurs stationnaires	64
2.7.4	Filtres passe-haut, passe-bas, passe-bande	69
2.7.5	Analyse fréquentielle des opérateurs de dérivation (discrète) première et seconde	69
2.8	La transformée de Fourier bidimensionnelle (DFT 2D)	72
2.8.1	Représentation matricielle de la DFT 2D : produit de Kronecker vs. itération de deux DFT 1D	76
2.8.2	Les propriétés de la DFT 2D	77
2.8.3	La DFT 2D et les opérateurs stationnaires	79
2.8.4	Visualisation du spectre d'amplitude en 2D	80
2.8.5	Un exemple remarquable de filtrage d'une image numérique dans l'espace de Fourier : le floutage	82
3	Fonctions périodiques et séries de Fourier	86
3.1	Rappels sur la convergence L^2 des séries de Fourier	86
3.1.1	Définitions	87
3.1.2	Construction de fonctions périodiques	88
3.1.3	Coefficients de Fourier d'une fonction 2π -périodique	90
3.1.4	Décroissance à l'infini des coefficients de Fourier	91
3.1.5	Notion de série de Fourier	92
3.1.6	Exemples de calculs de série de Fourier.	93
3.1.7	Convergence en moyenne quadratique d'une série de Fourier	95
3.1.8	Exemples et applications	97
3.2	Convergence ponctuelle des séries de Fourier	98
3.2.1	Régularité des fonctions périodiques	99
3.2.2	Convergence normale de la série de Fourier.	100
3.2.3	Théorème de Dirichlet	103
3.2.4	Preuve du Théorème de Dirichlet	105
3.3	Phénomène de Gibbs	107
3.4	Approximation de la série de Fourier en $L^2(\mathbb{T})$ avec la DFT	109

4	La transformée de Fourier pour fonctions non-périodiques	112
4.1	Transformée de Fourier et transformée de Fourier inverse pour une fonction de $L^1(\mathbb{R})$	112
4.2	Convolution et propriétés de la transformée de Fourier dans dans $L^1(\mathbb{R})$	113
4.3	Propriétés de la transformée de Fourier	115
4.3.1	Propriétés élémentaires : dilatation, translation	115
4.3.2	Transformée de Fourier et convolution	116
4.3.3	Transformée de Fourier et dérivation	116
4.3.4	TF et gaussienne	117
4.3.5	Tableau récapitulatif	118
4.3.6	La localisation des signaux et son effet sur le spectre	118
4.4	Le théorème d'échantillonnage de Shannon, Nyquist et Whittaker	119
4.4.1	Notion d'échantillonnage	119
4.4.2	La fréquence de Nyquist : « aliasing » et « oversampling »	121
4.5	Application de la transformée de Fourier à la résolution d'équations différentielles en dérivées ordinaires et partielles	121
4.5.1	Un exemple de EDO résolue avec la transformée de Fourier	121
4.5.2	Transformée de Fourier et EDPs	123
4.5.3	Un exemple physique : l'équation de la chaleur	123
4.5.4	Résolution de l'équation de la chaleur par la Transformée de Fourier	124
A	Pense-bête sur la convergence L^2 des séries de Fourier	126

Une très brève introduction à l'analyse de Fourier

Le sujet de ce cours est l'étude de la théorie et de certaines applications d'une transformation, dite « de Fourier », devenue fondamentale dans la science moderne.

Le mathématicien qui a inventé cette transformation est Jean Baptiste **Joseph Fourier**, né le 21 mars **1768** à *Auxerre* et mort le 16 mai **1830** à *Paris*.



FIGURE 1 – Gravure de Fourier faite par Julien Léopold Boilly (Wikipedia).

Fourier¹ a étudié à l'École Normale Supérieure, où il a été l'élève de mathématiciens extraordinaires comme Joseph-Louis **Lagrange** (Turin 1736 – Paris 1813), qui a été son superviseur de doctorat, Gaspard **Monge** (Beaune 1746 – Paris 1818) et Pierre-Simon de **Laplace** (Beaumont-en-Auge 1749 – Paris 1827). À **Grenoble**, Fourier développe ses expériences sur la propagation de la chaleur et, en **1822**, il publie un des mémoires les plus influents de la mathématique moderne : **La théorie analytique de la chaleur**.

1. *Curiosité* : on doit à Fourier l'introduction de la notation \sum pour exprimer une somme, écrite dans un mémoire de 1820, avant cette notation on utilisait les points de suspension pour exprimer les sommes finies.

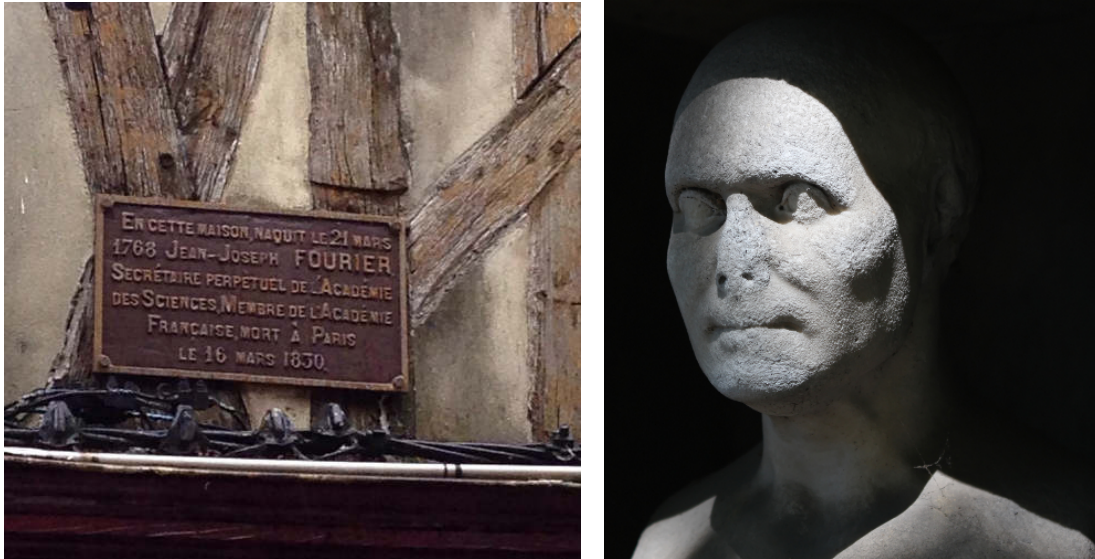


FIGURE 2 – *Gauche* : Maison à Auxerres où Fourier est né (image : E. Provenzi). *Droite* : Tombe de Fourier dans la Division 18 au cimetière du Père-Lachaise à Paris (Wikipedia).

Dans le mémoire, il formule l'hypothèse (très audacieuse pour cette époque) que la solution de l'équation qui gouverne la diffusion de la chaleur peut s'écrire comme une série de $\sin(\cdot)$ et $\cos(\cdot)$ ou des exponentielles complexes, comme ceci :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

ainsi que :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx}$$

où $x \mapsto f(x)$ est une fonction périodique de période 2π . On verra que les coefficients a_n , b_n , $n \in \mathbb{N}$, et γ_n , $n \in \mathbb{Z}$ s'appellent **coefficients de Fourier** et ils peuvent s'écrire explicitement comme des intégrales. Ces intégrales représentent des **produits scalaires** dans un espace fonctionnel qu'on appellera **espace de Hilbert**.

Quand f est une fonction définie sur \mathbb{R} et n'est pas périodique, alors la série de Fourier doit être remplacée par une transformation intégrale appelée **transformée de Fourier** :

$$f(x) \mapsto \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

L'importance de la série et de la transformée de Fourier réside dans le fait que les nombres entiers n (dans le cas de la série) et la quantité réelle ω (dans le cas de l'intégrale), représentent les **fréquences** des ondes dont la superposition reproduit la fonction f (dans un sens qu'on définira dans le cours).

La figure 3 montre l'approximation de la fonction qui représente un signal triangulaire périodique avec un nombre croissant de termes de la série de Fourier.

L'analyse de la convergence des séries de Fourier et des classes de fonctions pour lesquelles on peut correctement définir la transformée de Fourier, est un problème très compliqué. C'est

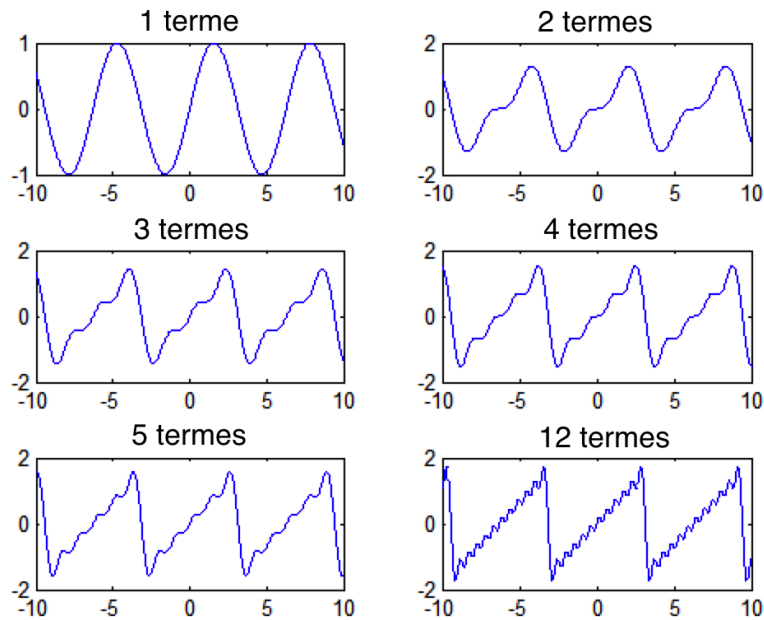


FIGURE 3 – Approximation d’un signal triangulaire périodique avec un nombre croissant de termes de la série de Fourier.

pourquoi, Lagrange et Laplace ont critiqué très fortement les idées de Fourier et que, d’une manière générale, la communauté mathématique est restée longtemps très sceptique devant ses idées.

Néanmoins, en **1829**, son doctorant, le grand mathématicien allemand Johann Peter Gustav Lejeune **Dirichlet** (Düren 1805 – Göttingen 1859), arrive à démontrer un ensemble de conditions pour la convergence de la série de Fourier. Le résultat de Dirichlet a ouvert la porte à l’application de la théorie de Fourier à de nombreux domaines différents. Les applications que nous verrons sont les suivantes :

- **Analyse fréquentielle des signaux** (1D : son, 2D : images). Un des champs d’application où la théorie de Fourier est la plus utilisée, est le **traitement des signaux**. On verra, parmi beaucoup d’autres applications, comment analyser une classe très importante d’opérateurs linéaires (les *opérateurs stationnaires*) dans le cadre de la théorie de Fourier et comment concevoir des *filtres* pour modifier le contenu fréquentiel du son et des images numériques. Notamment, on verra le principe de fonctionnement de l’*égalisateur graphique* utilisé par les DJ ;
- **Résolution des équations différentielles** en dérivées ordinaires et partielles (EDO et EDP) : avec la transformée de Fourier, on a la possibilité de *transformer certaines équations différentielles en équations algébriques*, qui sont beaucoup plus simples à résoudre. On verra l’application de cette technique lors de la résolution de l’équation de quatre EDP :
 - l’EDP de la chaleur (on verra la technique originale développée par Fourier!);
 - l’EDP des ondes, ou de D’Alembert ;

- l'EDP du potentiel, ou de Laplace ;
- l'EDP du transport.

On va étudier la théorie de Fourier dans trois situations différentes :

- **Transformée de Fourier pour suites de nombres complexes N -périodiques**, où $N \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, on parle de la **transformée de Fourier discrète** (ou DFT), qui est toujours la **transformation implémentée par les ordinateurs** quand on analyse des signaux numériques.
- **Théorie des séries de Fourier pour les fonctions périodiques**, qui met en relation une classe de fonctions périodiques (d'énergie finie) avec la suite des coefficients de Fourier.
- **Transformée de Fourier de fonctions intégrables sur \mathbb{R} et non périodiques**. Dans ce cas, la transformation de Fourier est écrite via une intégrale. C'est grâce à cette transformation intégrale qu'on pourra résoudre les EDP mentionnées ci-dessus.

Pour chacune de ces transformées, on définira un **espace fonctionnel** de travail, c'est-à-dire un ensemble de fonctions avec des propriétés qui nous permettront de développer la théorie de Fourier dans les trois situations décrites précédemment. La définition de ces espaces fonctionnels nécessite des concepts comme le produit scalaire dans les espaces vectoriels complexes et des notions de topologie qu'on introduira dans les chapitres suivants.

On commence par rappeler les définitions et les résultats plus importantes de la théorie des espaces vectoriels complexes avec produit scalaire et de leurs bases orthonormales. La raison de cet intérêt est très simple à justifier : la représentation matricielle de la DFT est donné par une matrice (unitaire) de passage de la base canonique à la « base de Fourier ».

La référence principale pour les chapitres 2 et 3 de ces polycopiés est le livre de Michael W. **Frazier** : « *An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra* », Springer, 1999, un complément à ce livre est l'ouvrage de M.W. **Wong** : « *Discrete Fourier Analysis* ». Les chapitres 4 et 5 sont, par contre, un mélange de résultats qui viennent de plusieurs livres. Une référence pour ces chapitres peut être l'excellent livre de Andres **Vretblad** : « *Fourier Analysis and Its Applications* », Springer, 2003.

Chapitre 1

Les résultats fondamentaux des espaces vectoriels complexes avec produit scalaire

La théorie de Fourier en dimension finie repose sur la construction d'une base **orthonormale** dans un espace vectoriel adéquat. Cette base est constituée par des exponentielles complexes. Ce chapitre est consacré à des rappels sur la notion d'espaces vectoriels complexes avec produit scalaire. Pour passer le plus rapidement possible à l'analyse de la théorie de Fourier, on reproduira seulement les preuves les plus simples des théorèmes qu'on verra dans ce chapitre.

1.1 Espaces vectoriels réels et complexes avec produit scalaire

Notion d'espace euclidien

On considère dans ce paragraphe un espace vectoriel V sur le corps des réels \mathbb{R} .

Définition 1.1. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie $n < +\infty$. On dit que le couple $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un **espace euclidien**, si V est un espace vectoriel réel munit d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto \langle v, w \rangle, \end{aligned}$$

où l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est

1. **bilinéaire**, i.e. linéaire relativement à chaque argument (l'autre étant fixé) : pour tout $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \langle \alpha v_1 + v_2, w_1 \rangle &= \alpha \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_2, w_1 \rangle \\ \langle v_1, \beta w_1 + w_2 \rangle &= \beta \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_1, w_2 \rangle, \end{aligned}$$

2. **symétrique** : pour tout $v, w \in V$, $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$;
3. **définie positive** : pour tout $v \in V$,

$$\begin{cases} \langle v, v \rangle \geq 0; \\ \langle v, v \rangle = 0 \implies v = 0_V, \text{ le vecteur nul de l'espace vectoriel } V. \end{cases}$$

L'exemple le plus important d'espace vectoriel avec produit scalaire réel est \mathbb{R}^n , muni du produit scalaire euclidien : pour tout $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^t$ deux vecteurs colonnes de \mathbb{R}^n écrits dans la base canonique, le produit scalaire euclidien entre v et w est :

$$\langle v, w \rangle \equiv \sum_{i=1}^n v_i w_i = v^t \cdot w = w^t \cdot v,$$

où v^t et w^t les vecteurs transposés de v et w .

Notion d'espace hermitien

On considère dans ce paragraphe un espace vectoriel V sur le corps des complexes \mathbb{C} (i.e. l'ensemble des coefficients scalaires utilisés pour les combinaisons linéaires d'éléments de V est \mathbb{C} et non pas \mathbb{R}). La définition de produit scalaire dans des espaces vectoriels complexes est très similaire à la définition dans le cas réel, mais il y a des différences importantes.

Commençons par observer que, si V est un espace vectoriel *complexe*, alors *il ne peut pas exister une transformation bilinéaire et définie positive* sur $V \times V$. En fait, dans ce cas on aurait, pour tout $v \in V$, par bilinéarité,

$$0 \leq \langle iv, iv \rangle = i^2 \langle v, v \rangle = -\langle v, v \rangle \leq 0 \quad \text{car } \langle v, v \rangle \geq 0 \text{ par positivité.}$$

Ainsi, on aurait $\langle v, v \rangle = 0$ pour tout $v \in V$.

Définition 1.2. *On dit qu'une application $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ est antilinéaire si pour tout $v, w \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $f(v + w) = f(v) + f(w)$ et $f(\alpha v) = \alpha^* f(v)$, où z^* (on utilisera indifféremment la notation \bar{z}) représente la **conjugaison complexe**.*

Selon le même principe, il n'existe pas de transformation sur $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ qui soit antilinéaire selon les deux coordonnées et définie positive : pour tout $v \in V$, $\langle iv, iv \rangle = (-i)(-i)\langle v, v \rangle = i^2 \langle v, v \rangle = -\langle v, v \rangle \leq 0$, comme pour le cas de la bilinéarité.

Une simple analyse montre que, pour éviter de perdre la positivité, il suffit de demander la linéarité par rapport à une variable et l'antilinéarité par rapport à l'autre. Cette propriété est dite **sesquilinearité**, i.e. linéaire selon l'une des variables et antilinéaire par rapport à l'autre variable¹. Le choix de la variable linéaire et antilinéaire est totalement arbitraire. L'antilinéarité relative à la deuxième variable est la *convention* utilisée parmi les *mathématiciens*, tandis que l'antilinéarité relative à la première variable est la *convention* typiquement adoptée parmi les *physiciens*. Pour uniformiser la notation, on considèrera dorénavant toujours la convention utilisée par les mathématiciens, i.e. $\langle \alpha v, \beta w \rangle = \alpha \beta^* \langle v, w \rangle$.

Il est important d'observer que *la sesquilinearité n'est pas compatible avec la symétrie*, en fait, si les deux propriétés sont vérifiées, alors $\langle v, \alpha w \rangle = \alpha^* \langle v, w \rangle$, mais aussi $\langle v, \alpha w \rangle = \langle \alpha w, v \rangle = \alpha \langle w, v \rangle = \alpha \langle v, w \rangle$. Donc $\langle v, \alpha w \rangle = \alpha^* \langle v, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle$ et cela peut être vrai si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ne peut pas être simultanément sesquilinearité et symétrique si on veut travailler avec des vecteurs qui appartiennent à un espace vectoriel complexe.

L'exemple qu'on vient d'examiner montre que, au lieu de la symétrie, on doit demander la propriété suivante pour toute couple de vecteurs $v, w : \langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle^*$, i.e. que l'échange de l'ordre des vecteurs dans $\langle \cdot, \cdot \rangle$ soit équivalent à la conjugaison complexe. Une transformation qui a cette propriété est dite *hermitienne*².

1. Sesqui vient du latin *semisque*, qui veut dire *une fois et demi*, on utilise cette nomenclature pour souligner qu'on n'a pas deux fois la linéarité, mais une fois « et demi », dû à la présence de la conjugaison complexe.

2. Charles Hermite, mathématicien français, 1822 Dieuze - 1901 Paris.

Ces observations justifient complètement la définition suivante.

Définition 1.3. Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie $n < +\infty$. On dit que le couple $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un **espace hermitien**, c'est-à-dire un espace vectoriel complexe avec produit scalaire, si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une application :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (v, w) &\longmapsto \langle v, w \rangle, \end{aligned}$$

telle que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est :

1. **sesquilinéaire** : pour tout $v_1, v_2, w_1, w_2, v, w \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\langle v_1 + v_2, w_1 + w_2 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_1, w_2 \rangle + \langle v_2, w_1 \rangle + \langle v_2, w_2 \rangle$$

et

$$\frac{\text{Anti-linéarité 2ème variable}}{\text{Linéarité 1ère variable}} \langle \alpha v, \beta w \rangle = \alpha \langle v, \beta w \rangle = \beta^* \langle \alpha v, w \rangle = \alpha \beta^* \langle v, w \rangle$$

2. **hermitien** : pour tout $v, w \in V$, $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle^*$;

3. **définie positive** : pour tout $v \in V$,

$$\begin{cases} \langle v, v \rangle \geq 0; \\ \langle v, v \rangle = 0 \implies v = 0_V, \text{ le vecteur nul de l'espace vectoriel } V. \end{cases}$$

Remarque 1.4. Le caractère hermitien de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ assure que pour tout $v \in V$, $\langle v, v \rangle = \langle v, v \rangle^*$ et donc $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$.

Si on considère la somme de n vecteurs au lieu de deux, la sesquilinéarité implique les formules suivantes, qu'on trouvera souvent dans le cours :

$$\boxed{\left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, w \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i, w \rangle ;} \quad (1.1)$$

$$\boxed{\left\langle v, \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* \langle v, w_i \rangle .} \quad (1.2)$$

Un exemple d'espace vectoriel hermitien est $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le **produit scalaire hermitien**, qui est défini ainsi : étant donnés deux vecteurs colonnes de \mathbb{C}^n , $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t$ et $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^t$, alors :

$$\langle v, w \rangle \equiv \sum_{i=1}^n v_i w_i^* = v^t \cdot w^* = (w^*)^t \cdot v.$$

1.2 Norme et distance associées à un produit scalaire

Si $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace vectoriel avec produit scalaire (réel ou complexe) alors on peut définir une norme sur V de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\rightarrow \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\\ v &\rightarrow \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}. \end{aligned}$$

On note que $\|v\|$ est bien défini car $\langle v, v \rangle \geq 0$.

On appelle un vecteur $v \in V$ tel que $\|v\| = 1$ un **vecteur unitaire**.

Exemples remarquables :

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) : \|v\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}; \\ (\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) : \|v\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i v_i^*} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}, \end{aligned}$$

où, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z z^* = |z|^2$, où, si $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est le *module* de z .

À partir d'une norme, on peut toujours définir une **distance** sur V :

$$d(v, w) = \|v - w\| = \sqrt{\langle v - w, v - w \rangle}, \quad \forall v, w \in V.$$

Donc, un espace vectoriel avec produit scalaire (réel ou complexe) est automatiquement aussi un espace vectoriel normé et un espace métrique, avec la norme et la distance engendrées par le produit scalaire lui même. Le contraire, en général, n'est pas vrai.

Les **propriétés de la norme** sont les suivantes : $\forall v, w \in V, \forall \alpha \in \mathbb{C}$

1. $\|v\| \geq 0$, $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$;
2. $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$: **Inégalité de Cauchy-Schwarz** ;
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$: **Inégalité Triangulaire** ;
4. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$.

Démonstration. La première propriété est une conséquence immédiate du caractère défini-positif du produit scalaire. Prouvons l'inégalité de Cauchy-Schwarz : soient $v, w \in V$. Notons déjà que l'inégalité est triviale si $\langle v, w \rangle = 0$. On peut donc considérer le cas générique où $\langle v, w \rangle \neq 0$.

- Première remarque : on peut toujours supposer que $\langle v, w \rangle$ (qui est a priori un nombre complexe) est en fait un réel. Supposons en effet que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vraie pour tous $v, w \in V$ tels que $\langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$. Mais alors, dans le cas général, pour $v, w \in V$, posons $\tilde{v} = \frac{\overline{\langle v, w \rangle}}{|\langle v, w \rangle|} v$ et $\tilde{w} = w$. Mais alors, par linéarité par rapport à la première coordonnée, $\langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle = \frac{\overline{\langle v, w \rangle}}{|\langle v, w \rangle|} \langle v, w \rangle = |\langle v, w \rangle| \in \mathbb{R}$ et donc $|\langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle| \leq \|\tilde{v}\| \|\tilde{w}\|$ ce qui donne $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$ car $\frac{\overline{\langle v, w \rangle}}{|\langle v, w \rangle|}$ est de module 1.

- On est donc ramené à prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas où $\langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$: dans ce cas, notons la fonction $P = t \in \mathbb{R} \mapsto \langle tv + w, tv + w \rangle = \|tv + w\|^2$. Ainsi P est une fonction réelle positive. De plus, c'est un polynôme du second degré en t : $P(t) = t^2 \|v\|^2 + 2t\Re(\langle v, w \rangle) + \|w\|^2 = t^2 \|v\|^2 + 2t\langle v, w \rangle + \|w\|^2$ (car $\langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$). Son discriminant est donc nécessairement négatif (sinon le trinôme du second degré P changerait de signe et ne pourrait donc pas être tout le temps positif). Ainsi $\Delta = 4\langle v, w \rangle^2 - 4\|v\|^2\|w\|^2 \leq 0$, ce qui donne $\langle v, w \rangle^2 \leq \|v\|^2\|w\|^2$, ce qui donne le résultat.

Prouvons maintenant l'inégalité triangulaire : pour tout $v, w \in W$, $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2\Re(\langle v, w \rangle) + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2|\langle v, w \rangle| + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2$ par inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc $\|v + w\|^2 \leq (\|v\| + \|w\|)^2$ ce qui donne le résultat.

L'homogénéité est une conséquence immédiate de la sesquilinearité du produit scalaire. \square

Par conséquent, les **propriétés de la distance** sont les suivantes : $\forall v, w, u \in V$

1. $d(v, w) \geq 0$, $d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w$;
2. $d(v, w) = d(w, v)$, symétrie ;
3. $d(v, u) \leq d(v, w) + d(w, u)$: **Inégalité Triangulaire**.

1.3 Familles orthogonales et orthonormales dans des espaces vectoriels avec produit scalaire

1.3.1 Définitions

Définition 1.5. Soit $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel avec produit scalaire réel ou complexe. Soit $p \geq 1$ et $F = (v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de V , alors :

- F est une **famille orthogonale** de vecteurs si chaque couple de vecteurs différents a pour produit scalaire 0 :

$$\forall i \neq j, \quad \langle v_i, v_j \rangle = 0. \quad \text{On note : } v_i \perp v_j.$$

- F est une famille orthonormale si elle est orthogonale et, en plus, pour tout $i = 1, \dots, p$, $\|v_i\| = 1$.

Une famille orthonormale est, donc, une famille de vecteurs unitaires et orthogonaux entre eux. Ces deux propriétés se résument en :

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{Famille orthonormale}$$

$\delta_{i,j}$ est dit **symbole de Kronecker** (Leopold Kronecker (Liegnitz 1823 – Berlin 1891)).

Remarque 1.6. Chaque vecteur $v \in V$ non nul peut être **normalisé** pour devenir un vecteur unitaire simplement via la division par sa norme : si on écrit $\hat{v} = \frac{v}{\|v\|}$, alors

$$\|\hat{v}\| = \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{\|v\|}{\|v\|} = 1 \quad \text{On observe aussi que, en général}$$

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \|u\|^2 + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + 2\Re\langle u, v \rangle + \|v\|^2. \end{aligned}$$

Il est donc clair que :

$$u \perp v \implies \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

qui est une généralisation du **théorème de Pythagore**. Attention dans le cas hermitien, la réciproque est fautive puisque si l'égalité $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ est satisfaite alors on obtient seulement que $\Re\langle u, v \rangle = 0$. Par exemple $u = (1, 0, \dots, 0)$ et $v = (i, 0, \dots, 0)$ satisfont l'égalité mais on a pas $u \perp v$ puisque $\langle u, v \rangle = \Im\langle u, v \rangle = i$.

1.3.2 Orthogonalité et indépendance linéaire

La condition d'orthogonalité est plus forte que l'indépendance linéaire : en fait, **toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre**.

Théorème 1.7. Soit F une famille orthogonale de $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $F = \{v_1, \dots, v_p\}$, formée de vecteurs non nuls ($\forall i = 1, \dots, p, v_i \neq 0$), alors F est libre.

Démonstration. Soit (a_1, \dots, a_p) des scalaires complexes. On suppose que $\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$, montrons que $\forall i = 1, \dots, p, a_i = 0$. Pour le prouver, on va calculer le produit scalaire entre la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^n a_i v_i$ et un vecteur quelconque v_j avec $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\left\langle \sum_{i=1}^n a_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle v_i, v_j \rangle = a_j \langle v_j, v_j \rangle = a_j \|v_j\|^2.$$

On a utilisé l'orthogonalité des vecteurs de la famille F dans la seconde égalité : $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$. Par hypothèse, $v_j \neq 0$ donc $\|v_j\| \neq 0$, donc, l'hypothèse que $\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$ implique que $a_j = 0$, et ce, pour tout $j = 1, \dots, p$. Donc la famille F est libre. \square

Corollaire 1.8. Une famille orthogonale de n vecteurs non nuls dans un espace $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de dimension n est une base de V .

Démonstration. C'est une famille libre de cardinal égal à la dimension, donc une base. \square

Définition 1.9. On appelle une famille de n vecteurs orthogonaux non nuls d'un espace vectoriel $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de dimension n , une **base orthogonale** de V . Si, en plus, la famille est orthonormale, on l'appelle une **base orthonormale** de V .

On rappelle que, pour déterminer les composantes d'un vecteur par rapport à une base quelconque on doit résoudre un système linéaire de n équations avec n inconnues. Par contre, si on a une base orthogonale ou orthonormale, les composantes sont déterminées par des produits scalaires, comme le montre le théorème suivant. Sachant que la résolution d'un système linéaire de n équations avec n inconnues nécessite, en général, beaucoup plus d'opérations que le calcul de produits scalaires, ceci montre déjà un des avantages de connaître une base orthogonale d'un espace vectoriel.

Théorème 1.10. Soit $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ une base **orthogonale** de $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, alors pour tout $v \in V$

$$v = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i$$

En particulier, si B est une base **orthonormale**, alors :

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i.$$

Démonstration. B est une base, donc il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j$. On considère le produit scalaire de cette expression de v avec un vecteur fixé u_i , $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\langle v, u_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j, u_i \right\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle u_j, u_i \rangle \underset{(u_i \perp u_j \ \forall i \neq j)}{=} \alpha_i \langle u_i, u_i \rangle = \alpha_i \|u_i\|^2$$

donc pour tout $i = 1, \dots, n$, $\alpha_i = \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2}$ et donc $v = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i$. Si B est une base orthonormale, alors $\|u_i\| = 1$ et donc on a la deuxième formule du théorème. \square

Interprétation géométrique du théorème : le théorème qu'on vient de démontrer est la généralisation du théorème de décomposition d'un vecteur dans le plan \mathbb{R}^2 ou dans l'espace \mathbb{R}^3 sur la base canonique des vecteurs unitaires des axes. Pour simplifier, on considère le cas de \mathbb{R}^2 comme dans la figure 1.1.

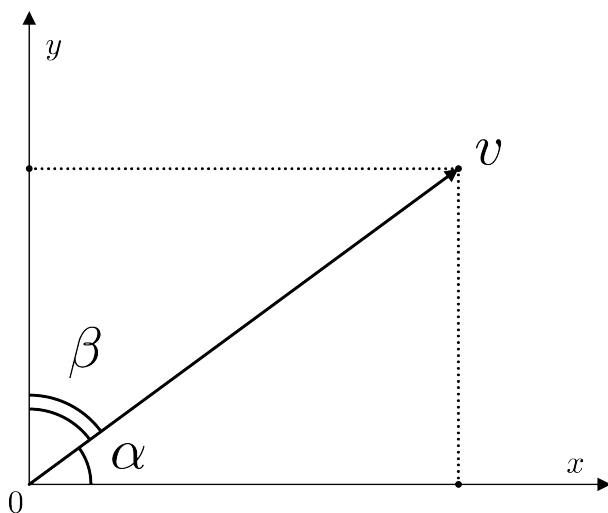


FIGURE 1.1 – Représentation graphique du théorème de décomposition sur la base canonique en \mathbb{R}^2 .

Si \hat{i} et \hat{j} sont respectivement les vecteurs unitaires des axes x et y , alors le théorème de décomposition dit que :

$$v = \underbrace{\|v\| \cos \alpha}_{\langle v, \hat{i} \rangle} \hat{i} + \underbrace{\|v\| \cos \beta}_{\langle v, \hat{j} \rangle} \hat{j} = \langle v, \hat{i} \rangle \hat{i} + \langle v, \hat{j} \rangle \hat{j},$$

qui est un cas particulier du théorème ci-dessus. L'importance de souligner ce résultat réside dans le fait que **la série de Fourier peut être vue comme une généralisation ultérieure du théorème de décomposition sur une base orthogonale ou orthonormale.**

1.3.3 Notion de projection orthogonale

Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^2 , il est clair que le produit scalaire d'un vecteur v avec un vecteur unitaire u réalise la projection orthogonale de v dans la direction donnée par u . De la même manière, on peut définir la projection orthogonale p d'un vecteur de \mathbb{R}^3 sur le plan engendré par deux vecteurs unitaires comme la somme des projections orthogonales p_1 et p_2 sur les deux vecteurs unitaires considérés séparément, comme il est montré dans la figure 1.2.

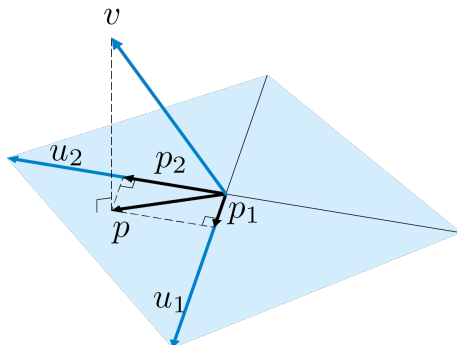


FIGURE 1.2 – Projection orthogonale p d'un vecteur de \mathbb{R}^3 sur le plan engendré par deux vecteurs unitaires.

Pour pouvoir utiliser cette propriété dans l'analyse de Fourier, on a besoin d'étudier, plus en général, la projection orthogonale dans les espaces vectoriels avec un produit scalaire en dimension finie.

On considère alors $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, un espace vectoriel complexe de dimension n avec produit scalaire, et une **famille orthogonale** $F = \{u_1, \dots, u_m\}$, $m \leq n$, de vecteurs non nuls : pour tout $i = 1, \dots, m$, $u_i \neq 0$.

On écrira le sous-espace vectoriel de V engendré par toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de F comme $\text{Span}(F)$:

$$\text{Span}(F) \equiv S = \left\{ s \in V : \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C} \text{ tels que } s = \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j \right\}.$$

On étend d'une façon naturelle la définition de la **projection orthogonale d'un vecteur** $v \in V$ **sur** $S = \text{Span}(F)$ comme ceci :

$$P_S(v) = \sum_{i=1}^m \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i,$$

il faut noter que la présence de la norme au carré est due au fait qu'il faut *normaliser deux fois* u_i . On définit l'**opérateur de projection orthogonale**³ sur S comme l'application (évidemment) linéaire :

$$\begin{aligned} P_S : V &\longrightarrow S \subseteq V \\ v &\longmapsto P_S(v) = \sum_{i=1}^m \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i. \end{aligned}$$

3. Aussi dit **projecteur orthogonal**.

Le théorème suivant montre que la projection orthogonale définie ci-dessus a toutes les propriétés de la projection orthogonale en \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

Théorème 1.11. *Avec les notations ci-dessus :*

- 1) Si $s \in S$ alors $P_S(s) = s$, i.e. l'action de P_S sur les vecteurs de S est l'identité ;
- 2) $\forall v \in V$ et $s \in S$:

$$\langle v - P_S(v), s \rangle = 0 \quad \text{i.e.} \quad v - P_S(v) \perp S ;$$

- 3) $\forall v \in V$ et $s \in S$:

$$\|v - P_S(v)\| \leq \|v - s\|$$

et l'égalité vaut si et seulement si $s = P_S(v)$.

Avant de démontrer le théorème, on observe que la propriété 3) dit que, **parmi tous les vecteurs de S , le vecteur qui minimise la distance à v est la projection orthogonale $P_S(v)$** . Par ailleurs, la propriété 2) est la généralisation d'un fait géométrique qu'on peut visualiser très facilement en \mathbb{R}^2 , comme dans la figure 1.3.

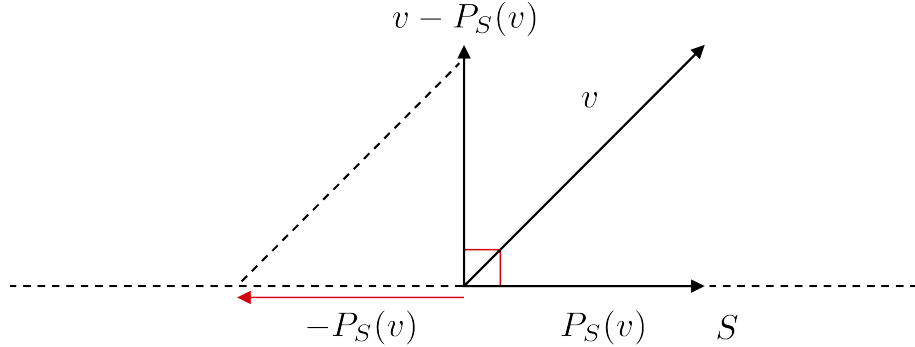


FIGURE 1.3 – Visualisation de la propriété 2) en \mathbb{R}^2 .

Preuve de 1) : Soit $s \in S$, i.e. $s = \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j$, alors :

$$P_S(s) = \sum_{i=1}^m \frac{\langle \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \underset{(u_i \perp u_j \ \forall i \neq j)}{=} \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \langle u_i, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i = s.$$

Preuve de 2) : On commence par considérer encore le produit scalaire de $P_S(v)$ avec un vecteur quelconque u_j , $j \in \{1, \dots, m\}$ fixé :

$$\langle P_S(v), u_j \rangle = \sum_{i=1}^m \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} \langle u_i, u_j \rangle \underset{(u_i \perp u_j \ \forall i \neq j)}{=} \frac{\langle v, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} \langle u_j, u_j \rangle = \langle v, u_j \rangle$$

d'où

$$\langle v, u_j \rangle - \langle P_S(v), u_j \rangle = 0 \quad \underset{\text{linéarité de } \langle \cdot, \cdot \rangle}{\iff} \langle v - P_S(v), u_j \rangle = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

Maintenant, si $s \in S$, alors $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m$ tels que $s = \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j$, donc

$$\langle v - P_S(v), s \rangle = \langle v - P_S(v), \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j \rangle \stackrel{\text{formule (1.2)}}{=} \sum_{j=1}^m \alpha_j^* \underbrace{\langle v - P_S(v), u_j \rangle}_{=0} = 0,$$

et la propriété 2) est prouvée.

Preuve de 3) : il est utile d'écrire la différence $v - s$ comme ceci : $v - P_S(v) + P_S(v) - s$. La propriété 2) nous dit que $v - P_S(v) \perp S$, par contre, $P_S(v), s \in S$ donc $P_S(v) - s \in S$. Par conséquent : $(v - P_S(v)) \perp (P_S(v) - s)$.

En utilisant la généralisation du théorème de Pythagore on peut alors écrire :

$$\|v - s\|^2 = \|v - P_S(v) + P_S(v) - s\|^2 = \|v - P_S(v)\|^2 + \underbrace{\|P_S(v) - s\|^2}_{\geq 0} \geq \|v - P_S(v)\|^2,$$

ce qui implique : $\|v - s\| \geq \|v - P_S(v)\| \forall v \in V, s \in S$. Bien évidemment, $\|P_S(v) - s\|^2 = 0$ si et seulement si $s = P_S(v)$, et dans ce cas on a $\|v - s\|^2 = \|v - P_S(v)\|^2$. \square

1.3.4 Existence d'une base orthonormale : la procédure itérative de Gram-Schmidt

On a vu que quand on a à disposition une base orthonormale, les formules de projection et de décomposition sont plus simples. Le théorème suivant dit que, dans un espace vectoriel de dimension finie avec produit scalaire, on peut toujours construire une base orthonormale à partir d'une famille libre de générateurs.

Théorème 1.12. (Procédure itérative de Gram-Schmidt ⁴) Soit $p \geq 1$ et (v_1, \dots, v_p) une famille libre de V . Alors il existe une famille orthonormée (u_1, \dots, u_p) de V (qu'on peut construire explicitement à partir de (v_1, \dots, v_p)) qui vérifie $\text{Span}\{v_1, \dots, v_p\} = \text{Span}\{u_1, \dots, u_p\}$.

Démonstration. La preuve est constructive, dans le sens où elle donne la méthode pour construire (u_1, \dots, u_p) à partir de (v_1, \dots, v_p) .

— 1ère étape, normalisation de v_1 :

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

— 2ème étape, comme montré dans la figure 1.4, on projette v_2 en direction de u_1 , i.e. on considère $\langle v_2, u_1 \rangle u_1$. Grâce au théorème 1.11 on sait que la différence vectorielle $v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$ est orthogonale à u_1 , enfin on normalise le résultat :

$$u_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1\|}.$$

— n -ième étape, par itération :

$$u_n = \frac{v_n - (\langle v_n, u_{n-1} \rangle u_{n-1} + \dots + \langle v_n, u_1 \rangle u_1)}{\|v_n - (\langle v_n, u_{n-1} \rangle u_{n-1} + \dots + \langle v_n, u_1 \rangle u_1)\|}.$$

\square

4. Jørgen Pedersen Gram (Nustrup 1850 - Copenhagen 1916), Erhard Schmidt (Tatu 1876 - Berlin 1959).

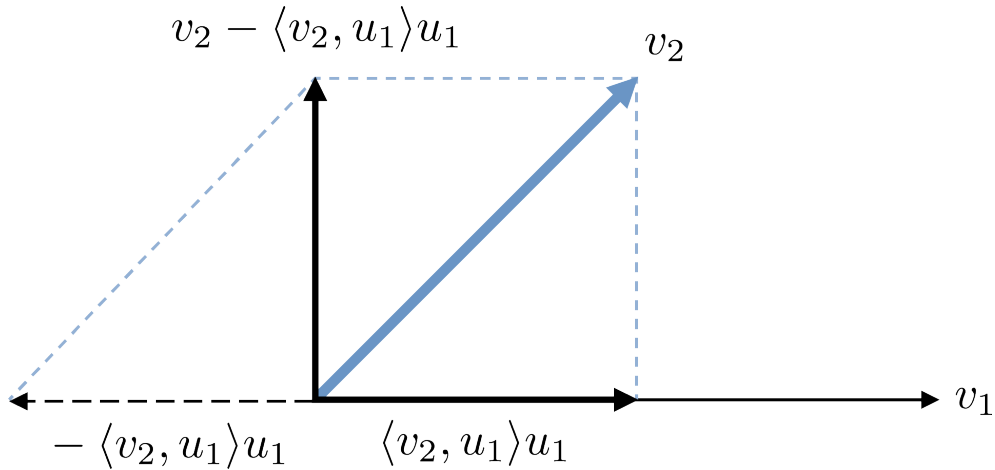


FIGURE 1.4 – Représentation graphique de la deuxième étape de la procédure d’orthonormalisation de Gram-Schmidt.

1.3.5 Les propriétés fondamentales d’une base orthonormale et orthogonale

On résume les propriétés les plus importantes d’une base orthonormale dans le théorème suivant :

Théorème 1.13. *Soit (u_1, \dots, u_n) une base orthonormale de (V, \langle, \rangle) , $\dim(V) = n$. Alors, $\forall v, w \in V$:*

1. *Théorème de décomposition sur une base orthonormale :*

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i ; \quad (1.3)$$

2. *Identité de Parseval⁵ :*

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle \langle u_i, w \rangle ; \quad (1.4)$$

3. *Identité de Plancherel⁶ :*

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle v, u_i \rangle|^2 . \quad (1.5)$$

Preuve de 1) : c’est une conséquence immédiate du théorème 1.11. En fait, comme (u_1, \dots, u_n) est une base, $v \in \text{Span}(u_1, \dots, u_n)$, en plus (u_1, \dots, u_n) est orthonormale, donc $v = P_S(v) = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i$. La division par $\|u_i\|^2$ dans la sommation n’est pas nécessaire car $\|u_i\| = 1 \forall i$.

5. Marc-Antoine de Parseval des Chênes (Rosières-aux-Salines 1755, Paris 1836).

6. Michel Plancherel (Bussy 1885 - Zurich 1967).

Preuve de 2) : en utilisant 1) on peut écrire $v = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i$, et, si on calcule le produit scalaire de v , écrit comme ceci, avec w , grâce à la formule (1.1), on a :

$$\langle v, w \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i, w \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle \langle u_i, w \rangle.$$

Preuve de 3) : si on écrit $w = v$ dans le côté gauche de l'identité de Parseval on a $\langle v, v \rangle = \|v\|^2$, par contre, à droite on a :

$$\sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle \langle u_i, v \rangle = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle \langle v, u_i \rangle^* = \sum_{i=1}^n |\langle v, u_i \rangle|^2$$

donc $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle v, u_i \rangle|^2$. □

Observations :

1. **L'interprétation physique de l'identité de Plancherel** est la suivante : l'énergie de v , mesurée par sa norme carrée, peut être décomposée par la somme des modules carrés de chaque projection de v sur les n directions de la base orthonormale (u_1, \dots, u_n) . Dans la théorie de Fourier les directions de la base orthonormale seront les harmoniques fondamentales (sinus et cosinus avec des fréquences bien définies), c'est pourquoi on appelle l'analyse de Fourier *analyse harmonique*.
2. Si, au lieu d'être une base orthonormale, (u_1, \dots, u_n) est une base orthogonale, alors, grâce à la formule du projecteur et au théorème 1.11, les résultats du théorème 1.13 peuvent être écrits comme ceci :

(a) **Décomposition de $v \in V$ sur une base orthogonale :**

$$v = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i; \tag{1.6}$$

(b) **Identité de Parseval pour une base orthogonale :**

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, u_i \rangle \langle u_i, w \rangle}{\|u_i\|^2}; \tag{1.7}$$

(c) **Identité de Plancherel pour une base orthogonale :**

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{|\langle v, u_i \rangle|^2}{\|u_i\|^2}. \tag{1.8}$$

1.4 Opérateurs entre espaces vectoriels avec produit scalaire : leurs propriétés et leur représentation matricielle

On sait qu'un opérateur (application) linéaire entre deux espaces vectoriels V et W est associé univoquement à une matrice, à condition de fixer une base de V et une base de W . Si

on considère aussi la structure donnée par la présence d'un produit scalaire, on peut définir une classe très importante des opérateurs : ceux qui conservent le produit scalaire entre vecteurs. La représentation matricielle de ces opérateurs joue un rôle fondamental dans les applications de la théorie de Fourier.

Dans les sections suivantes, on va rappeler les notions essentielles relatives aux opérateurs et matrices qui préservent le produit scalaire.

1.4.1 Rappels sur les opérateurs linéaires et matrices

On commence par introduire des *notations* qui nous permettront de simplifier l'écriture de beaucoup de formules dans le cours. On considère la situation suivante :

$$\begin{array}{lll} L : & V & \longrightarrow W \\ & v & \longmapsto L(v) = w \\ \dim : & n & m \\ \text{bases : } & \mathcal{E} = (v_j)_{j=1}^n & \mathcal{F} = (w_i)_{i=1}^m \end{array}$$

Comme \mathcal{E} est une base de V , on peut écrire tout vecteur $v \in V$ comme une combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{E} :

$$v = \sum_{j=1}^n a_j v_j.$$

Ainsi, v est représenté de façon univoque par le vecteur

$$[v]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

dont les coordonnées

Si A ($m \times n$) est une matrice quelconque et v un vecteur colonne de taille n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

alors Av est un vecteur colonne de taille m :

$$Av = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} v_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} v_j \end{pmatrix},$$

i.e., chaque ligne i de Av est donnée par la formule :

$$\boxed{(Av)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j} \quad \forall i = \{1, \dots, m\}. \quad (1.9)$$

On rappelle aussi que le produit matriciel entre une matrice $(m \times n)$, $A = (a_{ij})$, et une matrice $(n \times p)$, $B = (b_{jk})$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, p$ est une matrice $(m \times p)$, $C = (c_{ik})$ où

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk},$$

qui correspond, au *produit scalaire Euclidien réel* de la ligne i de A avec la colonne k de B (même quand les matrices sont complexes). Le produit matriciel est *associatif*, i.e. $(AB)C = A(BC)$ (quand le produit a du sens, bien sûr), mais *en général* il n'est pas commutatif : $AB \neq BA$. Quand $AB = BA$ on dit que les matrices *commutent*. On peut définir le **commutateur** entre A et B comme la matrice suivante : $[A, B] = AB - BA$, bien évidemment A et B *commutent si et seulement si leur commutateur $[A, B]$ est la matrice nulle*.

Notion de matrice représentative d'un opérateur linéaire

Soit $L : V \rightarrow W$ un opérateur linéaire, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_m)$ une base de W . Alors, pour tous les vecteurs de la base de départ $(e_j)_{j=1}^n$ de V , le vecteur Le_j se décompose de façon unique selon la base d'arrivée $(f_i)_{i=1}^m$:

$$\begin{cases} L(e_1) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \dots + a_{m1}f_m = \sum_{i=1}^m a_{i1}f_i \\ L(e_2) = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \dots + a_{m2}f_m = \sum_{i=1}^m a_{i2}f_i \\ \vdots \\ L(e_n) = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \dots + a_{mn}f_m = \sum_{i=1}^m a_{in}f_i \end{cases}$$

i.e.

$$L(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}f_i \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.10)$$

Théorème 1.14. *Avec les notations antérieures, la matrice⁷*

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

est la seule matrice qui satisfait l'équation suivante :

$$[Lv]_{\mathcal{F}} = A[v]_{\mathcal{E}} \quad \forall v \in V. \quad (1.12)$$

*Pour cette raison A est dite **matrice représentative de L dans les bases \mathcal{E} et \mathcal{F}** . On écrit $A = A_L^{\mathcal{E}, \mathcal{F}}$.*

7. La colonne i de A a comme éléments les coefficients de la combinaison linéaire qui exprime $L(e_i)$ en fonction des vecteurs de la base \mathcal{F} .

Démonstration. Soit v un vecteur quelconque de V , avec une décomposition sur la base \mathcal{E} donnée par $v = \sum_{j=1}^n c_j v_j$, donc $[v]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. On va appliquer L à v :

$$\begin{aligned} L(v) &= L\left(\sum_{j=1}^n c_j e_j\right) \stackrel{\text{linéarité de } L}{=} \sum_{j=1}^n c_j L(e_j) \\ &\stackrel{\text{eq. (1.10)}}{=} \sum_{j=1}^n c_j \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j\right) f_i, \end{aligned}$$

où dans le dernier cas on a utilisé le fait que les sommes *finies* sont toujours interchangeables entre elles. Donc on a : $L(v) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j\right) f_i$, et alors, par définition :

$$[L(v)]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} c_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} c_j \end{pmatrix}.$$

La ligne i de $[L(v)]_{\mathcal{F}}$ est $\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j$, mais grâce à l'eq. (1.9), cela est exactement la ligne i de $A[v]_{\mathcal{E}}$, donc $[L(v)]_{\mathcal{F}} = A[v]_{\mathcal{E}}$.

L'unicité de la matrice A est immédiate à démontrer : si, une autre matrice B satisfait $[L(v)]_{\mathcal{F}} = B[v]_{\mathcal{E}} \forall v \in V$, alors, par différence, on a :

$$0 = [L(v)]_{\mathcal{F}} - [L(v)]_{\mathcal{F}} = A[v]_{\mathcal{E}} - B[v]_{\mathcal{E}} = (A - B)[v]_{\mathcal{E}},$$

i.e. $(A - B)[v]_{\mathcal{E}} = 0$ pour tout $v \in V$, ce qui implique que $A = B$. □

Remarque 1.15. *On observe que :*

- Le nombre de lignes de A est $m = \text{dimension de l'espace d'arrivée } W$;
- Le nombre de colonnes de A est $n = \text{dimension de l'espace de départ } V$.

Donc A est carrée si et seulement si $\dim(V) = \dim(W)$. C'est le cas des **endomorphismes**, i.e. le cas où $L : V \rightarrow W$ avec $V = W$. L'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel V est lui-même un espace vectoriel par rapport à la somme des applications linéaires et au produit par un scalaire du même champ que V . On écrira l'espace vectoriel des endomorphismes de V comme $\text{End}(V)$. C'est le cas qu'on considérera désormais, car il est le plus intéressant pour le développement de la théorie de la transformée de Fourier.

1.4.2 Formules de changement de bases

Soit V une espace vectoriel de dimension n , qu'on munit d'une base $\mathcal{E} = (e_j)_{j=1}^n$ et d'une base $\mathcal{F} = (f_i)_{i=1}^n$. On se pose le problème de déterminer la matrice Q qui satisfait l'équation :

$$[v]_{\mathcal{F}} = Q[v]_{\mathcal{E}}, \tag{1.13}$$

i.e. la matrice qui permet de passer de $[v]_{\mathcal{E}}$, la représentation de v par rapport à la base \mathcal{E} , à $[v]_{\mathcal{F}}$, la représentation de v par rapport à la base \mathcal{F} .

Nous pouvons appliquer le formalisme vu au paragraphe précédent : on considère l'endomorphisme identité $\text{id}: V \rightarrow V$ (i.e. $\text{id}(v) = v$ pour tout $v \in V$), où l'espace de départ V est muni de la base \mathcal{E} et l'espace d'arrivée (qui est aussi V) est muni de la base \mathcal{F} . L'équation (1.12) du théorème 1.14 implique que la matrice $A = A_{\text{id}}^{\mathcal{E}, \mathcal{F}}$ associée à cet endomorphisme par rapport aux bases \mathcal{E} et \mathcal{F} satisfait la relation $[v]_{\mathcal{F}} = [\text{id}(v)]_{\mathcal{F}} = A[v]_{\mathcal{E}}$, qui est exactement (1.13). Par unicité, il vient donc

$$Q = A_{\text{id}}^{\mathcal{E}, \mathcal{F}}.$$

On peut expliciter les éléments de la matrice Q en se souvenant que les colonnes de Q sont les images des éléments de la base de départ \mathcal{E} exprimés selon la base d'arrivée \mathcal{F} . Or ici $L = \text{id}$ donc $L(e_j) = e_j$. Donc

Proposition 1.16. *Les colonnes de Q sont les vecteurs de l'ancienne base \mathcal{E} exprimés en fonction de la nouvelle \mathcal{F} et on a*

$$[v]_{\mathcal{F}} = Q[v]_{\mathcal{E}}. \quad (1.14)$$

La matrice Q est inversible (car c'est la matrice représentative de l'application id qui est bijective). Son inverse $P = Q^{-1}$ est l'unique matrice telle que

$$[v]_{\mathcal{E}} = P[v]_{\mathcal{F}}. \quad (1.15)$$

Encore une fois par unicité, P est la matrice représentative de id quand la base de départ est \mathcal{F} et celle d'arrivée est \mathcal{E} . Ainsi

Proposition 1.17. *Les colonnes de P sont les vecteurs de la nouvelle base \mathcal{F} exprimés en fonction de l'ancienne \mathcal{E} et on a*

$$[v]_{\mathcal{E}} = P[v]_{\mathcal{F}}. \quad (1.16)$$

On appelle P la **matrice de passage de la base \mathcal{E} à la base \mathcal{F}** . $Q = P^{-1}$ est la matrice de passage de la base \mathcal{F} à la base \mathcal{E} .

Remarque 1.18. *Il faut faire très attention à ne pas se tromper : par définition, la matrice de passage de \mathcal{E} à \mathcal{F} est bien P (et non Q). C'est une convention.*

L'avantage de P par rapport à Q , c'est que P est souvent très facile à calculer : ses colonnes sont les vecteurs de la nouvelle base en fonction de l'ancienne. Par contre, P transforme les coordonnées en fonction de la nouvelle base en les coordonnées de l'ancienne base (et non pas le contraire).

Une façon de ne pas se tromper entre (1.14) et (1.16) est de prendre $[v]_{\mathcal{F}} = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)^t$ où le 1 est en position i . Par définition, cela correspond à la représentation dans la base \mathcal{F} du i ème vecteur de la base \mathcal{F} , f_i . Mais alors $P[v]_{\mathcal{F}}$ est la i ème colonne de P qui est donc égale par (1.16) à $[f_i]_{\mathcal{E}}$, c'est-à-dire le vecteur qui contient les coordonnées de f_i dans la base \mathcal{E} : c'est exactement la construction de P .

Dans le développement de la théorie de la transformée de Fourier discrète, le résultat suivant sera très important.

Théorème 1.19. *Soient :*

- $L : V \rightarrow V$ un endomorphisme
- \mathcal{E}, \mathcal{F} : deux bases de V
- A la matrice associée à L quand V (en tant qu'espace de départ **et** d'arrivée) est muni de la base \mathcal{E} .
- P la matrice de passage de la base \mathcal{E} à la base \mathcal{F}

Alors $B = P^{-1}AP$ est la matrice associée à L quand V (en tant qu'espace de départ **et** d'arrivée) est muni de la base \mathcal{F} .

Bien évidemment, on a $PB = PP^{-1}AP \Rightarrow PBP^{-1} = APP^{-1}$, i.e.

$$B = P^{-1}AP \iff A = PBP^{-1}.$$

Deux matrices reliées par une telle relation sont dites **semblables** ou **similaires**. La similarité est une relation d'équivalence, un des buts les plus importants de l'algèbre linéaire consiste à trouver la représentation la plus « simple » dans la classe d'équivalence par similarité d'une matrice.

1.5 Opérateurs qui conservent le produit scalaire

Soit $L : (V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel V muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On dit que L **conserv**e le **produit scalaire** si

$$\forall v, w \in V, \langle v, w \rangle = \langle Lv, Lw \rangle.$$

Théorème 1.20. *On a l'équivalence suivante : $L : (V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ conserve le produit scalaire $\iff L$ transforme toute base orthonormale de V en une base orthonormale de V .*

Démonstration. $\boxed{\implies}$: on suppose que L conserve le produit scalaire. Si $(u_i)_{i=1}^n$ est une base orthonormale, alors $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j}$ et donc, comme L conserve $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\langle Lu_i, Lu_j \rangle = \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j}$. Ceci montre que la famille $(Lu_i)_{i=1}^n$ est une famille orthonormale de V , de cardinal n , donc une base.

$\boxed{\impliedby}$: on suppose que L transforme toute base orthonormales en une base orthonormale. Soit $(u_i)_{i=1}^n$ une base orthonormale de V (il en existe au moins une par procédé de Gram-Schmidt) et $v, w \in V$. Grâce à (1.3) on a :

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i, \quad w = \sum_{i=1}^n \langle w, u_i \rangle u_i.$$

En particulier, par l'identité de Parseval (1.4) on peut écrire :

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle \langle u_i, w \rangle, \tag{1.17}$$

De plus,

$$Lv = L \left(\sum_{i=1}^n \underbrace{\langle v, u_i \rangle}_{\in \mathbb{C}} u_i \right) \stackrel{\text{(linéarité de } L)}{=} \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle Lu_i$$

et de même,

$$Lw = \sum_{i=1}^n \langle w, u_i \rangle Lu_i.$$

Or, par hypothèse, L transforme toute base orthonormale en une base orthonormale, donc $(Lu_i)_{i=1}^n$ est une base orthonormale. Donc on peut écrire une deuxième identité de Parseval :

$$\langle Lv, Lw \rangle = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle \langle u_i, w \rangle. \quad (1.18)$$

Si on compare les identités (1.17) et (1.18) on obtient que $\langle Lv, Lw \rangle = \langle v, w \rangle \forall v, w \in V$, i.e. L conserve le produit scalaire. \square

Il est clair que si L conserve le produit scalaire, alors, en particulier, L conserve la norme (pour démontrer cela, ça suffit de considérer $v = w$) :

$$\langle Lv, Lw \rangle = \langle v, w \rangle \implies \|Lv\| = \|v\|$$

pour tout vecteur $v \in V$. Réciproquement, l'identité (dite de polarisation)

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} (\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

montre que si L préserve la norme, L préserve aussi le produit scalaire.

De plus, par conséquent $Lv = 0$ implique que $v = 0$, car 0 est le seul vecteur qui a pour norme 0. Donc $\text{Ker}(L) = \{0_V\}$ et L est inversible. On peut résumer ces propriétés dans le théorème suivant.

Théorème 1.21. *Soit $L \in \text{End}(V)$, où (V, \langle, \rangle) est un espace vectoriel avec produit scalaire (réel ou complexe). Si L conserve le produit scalaire, alors :*

1. L transforme bases orthonormales de V en bases orthonormales (et vice-versa) ;
2. L conserve la norme induite par le produit scalaire ;
3. $\text{Ker}(L) = \{0_V\}$,
4. L est inversible, i.e. il existe $L^{-1} \in \text{End}(V)$.

1.6 Valeurs et vecteurs propres d'un opérateur linéaire qui conserve le produit scalaire et matrices unitaires

On rappelle que, étant donné un endomorphisme $L : V \rightarrow V$, on dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une **valeur propre** pour L s'il existe $v \in V$, $v \neq 0$, tel que : $Lv = \lambda v$; v est dit **vecteur propre** pour L relatif à λ .

L'interprétation géométrique est la suivante : l'action de L sur v est la simple multiplication scalaire (*homothétie*). En particulier, si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors v est tout simplement *dilaté* (si $|\lambda| > 1$), *comprimé* (si $|\lambda| < 1$), *inversé* (si $\lambda < 0$), ou *laissé fixe* ($\lambda = 1$).

Si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\lambda = \rho e^{i\theta}$, où $\rho \geq 0$ est le module et θ est l'argument. Dans ce cas l'action de L sur le vecteur propre v est une rotation-homothétie : *rotation de l'angle θ et homothétie du facteur ρ* .

Les valeurs propres d'un opérateur qui conserve le produit scalaire ont une forme très spécifique, comme dit dans le théorème suivant.

Théorème 1.22. Si $L \in \text{End}(V)$ conserve le produit scalaire d'un espace vectoriel complexe V , alors les valeurs propres de L peuvent seulement être de la forme : $\lambda = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Démonstration. On écrit l'équation pour les valeurs propres : $Lv = \lambda v$, $v \neq 0_V$. Si L conserve $\langle \cdot, \cdot \rangle$, alors on sait que L conserve aussi la norme : $\|Lv\| = \|v\|$. Mais $\|Lv\| = \|\lambda v\|$, donc $\|v\| = |\lambda| \|v\|$. Ceci vaut si et seulement si $|\lambda| = 1$, mais les nombres complexes avec module unitaire sont exactement $\lambda = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. \square

On passe maintenant à la relation avec les matrices. On sait qu'un opérateur linéaire $L \in \text{End}(V)$ qui conserve le produit scalaire est inversible. Si U et U^{-1} sont les matrices qui représentent L et L^{-1} par rapport à une base orthonormale $(u_i)_{i=1}^n$, alors on peut démontrer que la relation entre elles est la suivante :

$$U^{-1} = (U^*)^t \iff U(U^*)^t = (U^*)^t U = I,$$

i.e. l'inverse U^{-1} est la transposée de la matrice conjuguée⁸.

On appelle U une **matrice unitaire** et on utilise un symbole spécial pour la matrice conjuguée et transposée : $\boxed{(U^*)^t = U^\dagger}$, qu'on lit « U dague », ou matrice *adjointe*.

On peut résumer les propriétés des matrices unitaires comme ceci.

Théorème 1.23. Soit U une matrice complexe $n \times n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. U conserve le produit scalaire : $\langle Uv, Uw \rangle = \langle v, w \rangle \forall v, w \in V$;
2. U est une isométrie : $\|Uv\| = \|v\| \forall v \in V$. En particulier, U est inversible ;
3. U est unitaire : U est inversible et $U^{-1} = U^\dagger$;
4. Les **lignes** et les **colonnes** de U sont une base orthonormale⁹ de \mathbb{C}^n par rapport au produit scalaire euclidien complexe.

1.6.1 Le cas réel

Les résultats qu'on vient d'examiner changent si V est un espace vectoriel réel. Dans ce cas, si $L \in \text{End}(V)$ conserve le produit scalaire, alors les valeurs propres de L peuvent être seulement $\lambda = \pm 1$ et la matrice associée à L via une base orthonormale de V est une **matrice orthogonale** O telle que :

$$O^{-1} = O^t \iff OO^t = O^t O = I,$$

i.e. l'inverse de O est la transposée.

On peut résumer les propriétés des matrices orthogonales comme ceci.

Théorème 1.24. Soit O une matrice réelle $n \times n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. O conserve le produit scalaire : $\langle Ov, Ow \rangle = \langle v, w \rangle \forall v, w \in V$;
2. O est une isométrie : $\|Ov\| = \|v\| \forall v \in V$, et donc il existe O^{-1} ;
3. O est orthogonale : $O^{-1} = O^t$;
4. Les **lignes** et les **colonnes** de O sont une base orthonormale de \mathbb{R}^n par rapport au produit scalaire euclidien réel.

8. Inverser une matrice est un processus qui nécessite beaucoup d'opérations, donc le fait de pouvoir inverser une matrice unitaire simplement avec la transposition et la conjugaison est très utile dans la pratique.

9. On peut démontrer que cela c'est une conséquence du fait que l'opérateur linéaire associé à U transforme bases orthogonales en bases orthogonales.

1.7 Rappel sur la diagonalisation des endomorphismes et matrices

La diagonalisation des matrices est une des plus importantes opérations de l'algèbre linéaire, en fait, travailler avec une matrice diagonale est beaucoup plus simple et rapide qu'avec une matrice quelconque.

Rappeler les plus importants concepts de la théorie de la diagonalisation est utile car une des plus remarquables applications de la transformée de Fourier est la diagonalisation des opérateurs stationnaires.

Définition 1.25. Un *endomorphisme* $L : V \rightarrow V$ est dit **diagonalisable** (ou *simple*) s'il existe une **base** de V donnée par des **vecteurs propres** de L .

Par conséquent, s'il existe $(v_i)_{i=1}^n$, base de V de vecteurs propres de L avec valeurs propres $(\lambda_i)_{i=1}^n$, alors :

$$\begin{cases} Lv_1 = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n \\ \vdots \\ Lv_n = \lambda_n v_n = 0v_1 + 0v_2 + \dots + \lambda_n v_n \end{cases}$$

Donc, la matrice A associée à L via la base de vecteurs propres $(v_i)_{i=1}^n$ est :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

On a aussi une définition de diagonalisabilité pour les matrices.

Définition 1.26. Une **matrice carrée** A est **diagonalisable** si elle est « *similaire* » à une matrice diagonale, i.e. il existe une matrice inversible C telle que $C^{-1}AC = D$ et D est diagonale.

Le théorème suivant explique pourquoi on a le droit d'utiliser le même mot, *diagonalisable*, dans deux définitions qui concernent les endomorphismes et les matrices.

Théorème 1.27. L est diagonalisable (comme endomorphisme) si et seulement si A est diagonalisable (comme matrice), où A est la matrice associée à L avec n'importe quelle base.

Il existe une théorie générale très élégante relative à la diagonalisabilité des endomorphismes et des matrices, mais pour ce cours, le résultat suivant sera suffisant.

Définition 1.28. Soit $L : V \rightarrow V$ un endomorphisme. On dit que L est **hermitien** si pour tout $v, w \in V$, $\langle Lv, w \rangle = \langle v, Lw \rangle$.

Le théorème important de diagonalisation est le suivant :

Théorème 1.29. Soit $L : V \rightarrow V$ un endomorphisme hermitien et A : matrice associée à L par rapport à la base canonique de \mathbb{C}^n . Alors L (resp. A) est diagonalisable dans une base orthonormée et a des valeurs propres réelles. En particulier, il existe P matrice de passage unitaire et D diagonale réelle telle que $A = PDP^{-1}$. En particulier, P est la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

Chapitre 2

La transformée de Fourier discrète

Le contexte de ce chapitre est celui de l'analyse de signaux discrets (i.e. des suites) périodiques, où nous allons appliquer dans un cadre simple le formalisme du chapitre précédent. La Transformée de Fourier Discrète (ou *Discrete Fourier Transform*, DFT) a de nombreuses applications, en particulier dans le cadre de la théorie des signaux, comme on verra dans la section 2.5.

2.1 L'espace des suites complexes N -périodiques

Soit $N \geq 1$ un entier fixé.

Définition 2.1. Soit $z = (z(j))_{j \in \mathbb{Z}}$ une suite (indexée par \mathbb{Z}) de nombres complexes. On dit que z est périodique de période N si pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $z(i) = z(i + N)$. On note ℓ_N l'ensemble des suites périodiques de période N .

Remarque 2.2. ℓ_N est un espace vectoriel complexe avec les opérations de somme et de multiplication scalaire usuelles : pour $z, w \in \ell_N$, $\alpha \in \mathbb{C}$, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $(z+w)(j) := z(j) + w(j)$ et $(\alpha z)(j) := \alpha z(j)$.

Pour définir entièrement une suite $z \in \ell_N$, il faut et il suffit de définir N termes consécutifs, par exemple $(z(0), \dots, z(N-1)) \in \mathbb{C}^N$. Les autres termes de la suite z s'en déduisent par périodicité. Par exemple, pour $z \in \ell_{12}$ donnée par $(z(0), z(1), \dots, z(11)) = (1, i, i, \sqrt{2}i, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 2)$ on détermine $z(-21)$ en ajoutant à -21 le multiple de 12 de telle sorte que $-21 + 12k \in \{0, \dots, 11\}$, c'est-à-dire pour $k = 2$, $-21 + 2 \cdot 12 = 3$, ce qui implique $z(-21) = z(3) = \sqrt{2}i$

Plus précisément, l'application suivante est un *isomorphisme linéaire* (la preuve est laissée comme exercice) :

$$\begin{aligned} \ell_N &\longleftrightarrow \mathbb{C}^N \\ z &\longleftrightarrow (z(0), z(1), \dots, z(N-1)) = \begin{pmatrix} z(0) \\ z(1) \\ \vdots \\ z(N-1) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

On utilisera la représentation de z comme vecteur ligne ou vecteur comme colonne selon nos besoins.

Définition 2.3. Grâce à l'isomorphisme ci-dessus, on peut définir la **base canonique** B de $\ell_N : B = (e_0, e_1, \dots, e_{N-1})$ avec pour tout $j = 0, \dots, N-1$, e_j définie sur $\{0, \dots, N-1\}$ par

$$\forall k = 0, \dots, N-1, e_j(k) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases},$$

puis étendue par périodicité sur \mathbb{Z} tout entier.

Définition 2.4. On définit le **produit scalaire** sur ℓ_N par :

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} z(k)w(k)^*,$$

En particulier, on dira que deux suites $z, w \in \ell_N$ sont orthogonales si et seulement si $\langle z, w \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} z(k)w(k)^* = 0$. La norme induite par ce produit scalaire est :

$$\|z\| = \left(\sum_{k=0}^{N-1} |z(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

que l'on appellera « **norme** ℓ_N ».

2.1.1 La base orthogonale des exponentielles complexes de ℓ_N

Quelques rappels d'analyse complexe

On rappelle les formules et définitions suivantes :

1. tout $z \in \mathbb{C}$ peut s'écrire sous la forme $z = \rho[\cos \alpha + i \sin \alpha] = \rho e^{i\alpha}$, où $\rho, \alpha \in \mathbb{R}$, $\rho \geq 0$;
2. Formules d'Euler : $\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$, $\sin \alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$;
3. soit $z \in \mathbb{C}$, alors $|z| = 1 \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, z = e^{i\alpha}$;
4. pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}, e^{i\alpha} = e^{i(\alpha+2\pi k)}$;
5. pour tout $k \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z}, e^{2\pi i k} = 1$;
6. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$; $(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}$ et $(e^{i\alpha})^* = e^{-i\alpha}$;
7. Racines complexes : étant donné $z = \rho e^{i\alpha}$, les solutions de l'équation $w^N = z$ sont les N racines complexes données par : $z_m = \sqrt[N]{\rho} e^{i\frac{2\pi m + \alpha}{N}}$, $m = 0, \dots, N-1$;
8. En particulier, les *racines Nièmes de l'unité* sont définies par

$$\omega_m = e^{2\pi i \frac{m}{N}}, \quad m = 0, \dots, N-1. \quad (2.1)$$

On rappelle enfin la formule usuelle de sommation géométrique :

Lemme 2.5. Pour $k \geq 1$, on a

$$\sum_{j=0}^k z^j = \begin{cases} \frac{1-z^{k+1}}{1-z} & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ k+1 & \text{si } z = 1. \end{cases}$$

Base orthogonale de Fourier

Définition 2.6 (Base orthogonale de Fourier). *Pour $N \geq 1$, on définit la famille $(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{N-1})$ de N éléments de ℓ_N de la façon suivante : pour tout $m \in \{0, \dots, N-1\}$, \mathcal{E}_m est donnée sur $\{0, \dots, N-1\}$ par*

$$\forall k = 0, \dots, N-1, \mathcal{E}_m(k) = e^{\frac{2\pi i k m}{N}} = (\omega_m)^k = (\omega_1)^{mk}, \quad (2.2)$$

puis étendue par périodicité.

De façon plus explicite :

— pour $m = 0$:

$$(\mathcal{E}_0(0), \mathcal{E}_0(1), \dots, \mathcal{E}_0(N-1)) = (1, 1, \dots, 1);$$

— pour $m = 1$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_1(0), \mathcal{E}_1(1), \dots, \mathcal{E}_1(N-1)) &= \left(1, e^{\frac{2\pi i}{N}}, e^{\frac{4\pi i}{N}}, \dots, e^{\frac{2\pi i(N-1)}{N}}\right) \\ &= \left(1, \omega_1, \omega_1^2, \omega_1^3, \dots, \omega_1^{N-1}\right); \end{aligned}$$

— pour $m = 2$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_2(0), \mathcal{E}_2(1), \dots, \mathcal{E}_2(N-1)) &= \left(1, e^{\frac{4\pi i}{N}}, e^{\frac{8\pi i}{N}}, \dots, e^{\frac{4\pi i(N-1)}{N}}\right) \\ &= \left(1, \omega_1^2, \omega_1^4, \omega_1^6, \dots, \omega_1^{2(N-1)}\right); \end{aligned}$$

— pour m quelconque :

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_m(0), \mathcal{E}_m(1), \dots, \mathcal{E}_m(N-1)) &= \left(1, e^{\frac{2\pi i m}{N}}, e^{\frac{4\pi i m}{N}}, \dots, e^{\frac{2\pi i(N-1)m}{N}}\right) \\ &= \left(1, \omega_1^m, \omega_1^{2m}, \omega_1^{3m}, \dots, \omega_1^{(N-1)m}\right); \end{aligned}$$

— pour $m = N-1$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_{N-1}(0), \mathcal{E}_{N-1}(1), \dots, \mathcal{E}_{N-1}(N-1)) &= \left(1, e^{\frac{2\pi i(N-1)}{N}}, e^{\frac{4\pi i(N-1)}{N}}, \dots, e^{\frac{2\pi i(N-1)^2}{N}}\right) \\ &= \left(1, \omega_1^{N-1}, \omega_1^{2(N-1)}, \omega_1^{3(N-1)}, \dots, \omega_1^{(N-1)^2}\right); \end{aligned}$$

On voit grâce à la formule $z = e^{i\alpha} = [\cos \alpha + i \sin \alpha]$, que les valeurs successives de chaque suite \mathcal{E}_m oscillent selon des fréquences différentes, (les arguments des fonctions cos et sin changent avec les coefficients m et k). Comme on verra bientôt, la signification de ces fréquences a une importance centrale dans l'analyse de Fourier.

Lemme 2.7. *Pour tout $j, k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ on a la formule :*

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n \frac{j-k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n \frac{k-j}{N}} = N \delta_{j,k} = \begin{cases} N & j = k \\ 0 & j \neq k. \end{cases} \quad (2.3)$$

Démonstration. On fait la preuve pour la première somme, (la seconde somme est la conjuguée de la première). On a

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n \frac{j-k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{2\pi i \frac{j-k}{N}} \right)^n.$$

On a les deux cas suivants :

— Si $j = k$, $z := e^{2\pi i \frac{j-k}{N}} = 1$ et donc

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n \frac{j-k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N.$$

— Si $j \neq k \in \{0, \dots, N-1\}$, $z := e^{2\pi i \frac{j-k}{N}} \neq 1$, alors, grâce à la formule de la sommation géométrique :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{2\pi i \frac{j-k}{N}} \right)^n &= \sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1 - z^N}{1 - z} \\ &= \frac{1 - e^{2\pi i \frac{(j-k)N}{N}}}{1 - e^{2\pi i \frac{j-k}{N}}} = \frac{1 - e^{2\pi i(j-k)}}{1 - e^{2\pi i \frac{j-k}{N}}}. \end{aligned}$$

Comme $j - k \in \mathbb{Z}$, $e^{2\pi i(j-k)} = 1$, et donc $\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n \frac{j-k}{N}} = 0$. □

Maintenant, on peut démontrer facilement que \mathcal{E} est une base orthogonale de ℓ_N .

Théorème 2.8. $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{E}_{N-1})$ est une base orthogonale de ℓ_N .

Démonstration. La famille \mathcal{E} est de cardinal N donc il suffit de montrer qu'elle est orthogonale. On va donc calculer les produits scalaires $\langle \mathcal{E}_j, \mathcal{E}_k \rangle$, $\forall j, k \in \{0, \dots, N-1\}$:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_j, \mathcal{E}_k \rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{E}_j(n) \mathcal{E}_k(n)^* = \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{jn}{N}} e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{(j-k)n}{N}} = N\delta_{j,k}, \end{aligned}$$

où on a utilisé le Lemme 2.3 pour arriver à la dernière égalité, qui montre que

$$\langle \mathcal{E}_j, \mathcal{E}_k \rangle = N\delta_{j,k},$$

i.e. les éléments de la base sont orthogonaux entre eux. □ Par contre, la famille \mathcal{E} n'est pas orthonormée :

$$\boxed{\|\mathcal{E}_m\|^2 = N}, \quad \boxed{\|\mathcal{E}_m\| = \sqrt{N}}, \quad \forall m \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

Quelques exemples :

On considère ici les cas $N = 2$, $N = 3$ et $N = 4$.

— Pour $N = 2$, ℓ_2 est l'ensemble des suites z 2-périodiques, caractérisées par la donnée de $\{z = (z(0), z(1)) \in \mathbb{C}^2\}$. Dans ce cas,

$$\mathcal{E}_0 = (1, 1) \text{ et } \mathcal{E}_1 = \left(1, e^{2\pi i \frac{1-1}{2}}\right) = (1, e^{\pi i}) = (1, -1).$$

Et donc

$$\mathcal{E} = ((1, 1), (1, -1)), \tag{2.4}$$

est la base de Fourier des exponentielles complexes de ℓ_2 .

- Pour $N = 3$, ℓ_3 est l'ensemble des suites z 3-périodiques, caractérisées par la donnée de $\{z = (z(0), z(1), z(2)) \in \mathbb{C}^3\}$. Alors (exercice) :

$$\mathcal{E} = \left((1, 1, 1), \left(1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right). \quad (2.5)$$

Pour se convaincre de ce calcul on se rappellera que dans ce cas, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ (parfois appelé $\omega = j$) est une racine primitive 3ième de l'unité. Ainsi, $\omega^2 = \bar{\omega}$ et $\omega^4 = \omega$.

- Pour $N = 4$, ℓ_4 est l'ensemble des suites z 4-périodiques, caractérisées par la donnée de $\{z = (z(0), z(1), z(2), z(3)) \in \mathbb{C}^4\}$. Alors (exercice) :

$$\mathcal{E} = ((1, 1, 1, 1), (1, i, -1, -i), (1, -1, 1, -1), (1, -i, -1, i)). \quad (2.6)$$

Conséquences

On peut utiliser les résultats (1.6), (1.7), (1.8) de la section 1.3.5 pour écrire les formules suivantes, qui sont valides pour deux éléments $z, w \in \ell_N$ quelconques :

- Décomposition sur la base orthogonale \mathcal{E} :

$$z = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\langle z, \mathcal{E}_m \rangle}{N} \mathcal{E}_m \quad (2.7)$$

- Identité de Parseval pour la base orthogonale \mathcal{E} :

$$\langle z, w \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\langle z, \mathcal{E}_m \rangle \langle \mathcal{E}_m, w \rangle}{N} \quad (2.8)$$

- Identité de Plancherel pour \mathcal{E} :

$$\|z\|^2 = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{|\langle z, \mathcal{E}_m \rangle|^2}{N}. \quad (2.9)$$

2.2 La base orthonormale de Fourier de ℓ_N

2.2.1 Définition

Dans la section précédente on a vu que la norme ℓ_N de toutes les suites \mathcal{E}_m est \sqrt{N} , donc il est évident qu'on peut obtenir une base orthonormale si on divise par \sqrt{N} . Ceci justifie la définition suivante.

Définition 2.9. On appelle base orthonormale de Fourier de ℓ_N la collection

$$E = (E_0, E_1, E_2, \dots, E_{N-1})$$

définie par

$$\forall m = 0, \dots, N-1, E_m := \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{N}},$$

c'est-à-dire

$$\forall m, n = 0, \dots, N-1, E_m(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i \frac{mn}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} (\omega_m)^n. \quad (2.10)$$

Par construction, une telle famille est bien une base orthonormée de ℓ_N .

Revenons aux exemples vus plus haut : pour $N = 2$,

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}} ((1, 1), (1, -1)) \quad (2.11)$$

est la base orthonormale de Fourier de ℓ_2 et pour $N = 3$

$$E = \frac{1}{\sqrt{3}} \left((1, 1, 1), (1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}), (1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) \right). \quad (2.12)$$

est la base orthonormale de Fourier de ℓ_3 et finalement pour $N = 4$

$$E = \frac{1}{2} ((1, 1, 1, 1), (1, i, -1, -i), (1, -1, 1, -1), (1, -i, -1, i)). \quad (2.13)$$

est la base orthonormale de Fourier de ℓ_4 .

2.2.2 Conséquences

La traduction du théorème 1.13 dans ℓ_N avec la base orthonormale de Fourier est la suivante : étant donnés des éléments $z, w \in \ell_N$ quelconques, on a

— Décomposition sur la base orthonormale de Fourier :

$$z = \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, E_m \rangle E_m \quad (2.14)$$

— Identité de Parseval :

$$\langle z, w \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, E_m \rangle \langle E_m, w \rangle \quad (2.15)$$

— Identité de Plancherel :

$$\|z\|^2 = \sum_{m=0}^{N-1} |\langle z, E_m \rangle|^2. \quad (2.16)$$

2.2.3 Autre choix de renormalisation

Certaines références choisissent une renormalisation différente, dans le but d'écrire certaines formules de façon plus simple. Par exemple, il est possible de considérer une renormalisation en $\frac{1}{N}$ au lieu de $\frac{1}{\sqrt{N}}$:

$$\forall m \in \{0, \dots, N-1\}, F_m := \frac{\mathcal{E}_m}{N} \quad (2.17)$$

Bien sûr, dans ce cas, la famille (F_0, \dots, F_{N-1}) n'est plus orthonormée (mais elle reste orthogonale). Ce choix de renormalisation rend certaines formules plus simples (mais complique d'autres). Il faut bien comprendre qu'il n'existe pas de renormalisation idéale : toutes ont des avantages et des inconvénients.

2.3 Les coefficients de Fourier et la transformée de Fourier discrète (DFT)

2.3.1 Transformée de Fourier discrète

La définition de la transformée de Fourier discrète change selon les auteurs et les applications. Les deux définitions les plus répandues utilisent la base orthonormale E et un mélange des bases orthogonales \mathcal{E} et F .

Les deux choix sont utiles pour des raisons différentes :

- Utiliser la base orthonormale E permet d'obtenir des opérateurs unitaires ;
- Utiliser un mélange des bases orthogonales \mathcal{E} et F permet de simplifier beaucoup de formules, notamment la formule de la convolution, que l'on verra plus tard dans ce chapitre, qui est très utilisée dans les applications.

Pour éviter des complications de notations inutiles, on travaillera seulement dans ce cours avec les bases orthogonales \mathcal{E} et F . On laisse le lecteur effectuer les modifications nécessaires pour une autre renormalisation.

On commence par reconsidérer la décomposition

$$z = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\langle z, \mathcal{E}_m \rangle}{N} \mathcal{E}_m = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, \mathcal{E}_m \rangle \mathcal{E}_m$$

En rappelant la définition du produit scalaire de ℓ_N , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \langle z, \mathcal{E}_m \rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} z(n) [\mathcal{E}_m(n)]^* = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \left(e^{2\pi i \frac{mn}{N}} \right)^* \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}}. \end{aligned}$$

Définition 2.10. *Donné $z \in \ell_N$ quelconque, on appelle les valeurs complexes $\langle z, \mathcal{E}_m \rangle$, $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, les coefficients de Fourier de z , que l'on écrit avec $\hat{z}(m)$. Explicitement :*

$$\boxed{\hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}}} \quad \text{Coefficients de Fourier de } z. \quad (2.18)$$

La suite des coefficients de Fourier de z est notée $\hat{z} \in \ell_N$:

$$\hat{z} = (\hat{z}(0), \hat{z}(1), \hat{z}(2), \dots, \hat{z}(N-1)). \quad (2.19)$$

On appelle l'opérateur linéaire qui transforme $z \in \ell_N$ en la suite $\hat{z} \in \ell_N$ de ses coefficients de Fourier, i.e.

$$\begin{aligned} DFT \equiv \hat{\cdot} : \ell_N &\longrightarrow \ell_N \\ z &\longmapsto DFT(z) \equiv \hat{z}, \end{aligned}$$

$$\hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} \quad \forall m \in \{0, 1, \dots, N-1\},$$

la **transformée de Fourier discrète**, que l'on écrira **DFT** (*Discrete Fourier Transform*), à partir de maintenant.

Il faut observer que la variable de z est n , tandis que la variable de \hat{z} est m . Dans la section 2.5 on donnera l'interprétation de n et m dans la théorie des signaux : n est la valeur discrète d'un instant temporel (ou d'une position spatiale), où on mesure un signal z , par contre m est proportionnel à la fréquence d'oscillation d'une onde (dite harmonique), multiple d'une fréquence fondamentale. Donc, la DFT permet de passer d'une description en termes d'échantillons temporels (ou spatiaux) d'un signal, à une description en terme de fréquences du signal même. Dans la section 2.5 on formalisera cette affirmation.

Avec les définitions ci-dessus, on peut écrire la décomposition de z comme ceci :

$$z = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) \mathcal{E}_m, \quad (2.20)$$

Si on utilise la notation que l'on vient d'introduire, on peut réécrire le théorème de décomposition sur la base orthonormale de Fourier et les identités de Parseval et Plancherel comme cela :

— **Décomposition de z sur la base orthogonale de Fourier :**

$$\boxed{z(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) e^{2\pi i \frac{mn}{N}} \quad \forall n = 0, 1, \dots, N-1} \quad (2.21)$$

— **Identité de Parseval :**

$$\boxed{\langle z, w \rangle = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) \hat{w}(m)^* = \frac{1}{N} \langle \hat{z}, \hat{w} \rangle} \quad (2.22)$$

— **Identité de Plancherel :**

$$\boxed{\|z\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |\hat{z}(m)|^2 = \frac{1}{N} \|\hat{z}\|^2.} \quad (2.23)$$

2.3.2 La transformée de Fourier inverse (IDFT)

Il est intéressant de comparer les formules (2.18) et (2.21) :

$$\hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}}, \quad z(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) e^{2\pi i \frac{mn}{N}}, \quad \forall n, m \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

La première relation dit que, si on connaît les valeurs $z(n)$, alors on peut reconstruire les valeurs $\hat{z}(m)$ grâce à la formule (2.18). La deuxième relation dit que, si on connaît les valeurs $\hat{z}(m)$, alors on peut reconstruire les valeurs $z(n)$ grâce à la formule (2.21). Ceci montre une « dualité » entre les deux formules : on peut passer de la suite z à la suite \hat{z} et vice-versa via les relations (2.18) et (2.21). On va formaliser cette dualité avec la définition et le théorème qui suivent.

Définition 2.11. On appelle l'opérateur linéaire :

$$\begin{aligned} IDFT \equiv \check{\cdot} : \ell_N &\longrightarrow \ell_N \\ u &\longmapsto IDFT(u) \equiv \check{u}, \end{aligned}$$

$$\boxed{\check{u}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} u(m) e^{2\pi i \frac{mn}{N}}} \quad \forall n \in \{0, 1, \dots, N-1\},$$

la **transformée de Fourier discrète inverse**, que l'on écrira **IDFT** (Inverse Discrete Fourier Transform), à partir de maintenant.

Théorème 2.12. La IDFT est l'opérateur linéaire inverse de la DFT et vice-versa :

$$IDFT = DFT^{-1}, \quad DFT = IDFT^{-1},$$

autrement dit :

$$\check{\check{z}} = z, \quad \hat{\hat{z}} = z \quad \forall z \in \ell_N.$$

Démonstration. On doit démontrer que la composition entre DFT et IDFT et entre IDFT et DFT donne l'opérateur identité id : $DFT \circ IDFT = IDFT \circ DFT = id$, $id(z) = z$, $\forall z \in \ell_N$.

On commence par vérifier que, si on a une suite $z \in \ell_N$ quelconque, et on applique la DFT pour obtenir la suite des coefficients de Fourier $\hat{z} \in \ell_N$, alors on peut revenir à la suite initiale via l'application de la IDFT :

$$\begin{array}{ccccc} \ell_N & \xrightarrow{\text{DFT}} & \ell_N & \xrightarrow{\text{IDFT}} & \ell_N \\ z & \longmapsto & \hat{z} & \longmapsto & \check{\hat{z}} = z. \end{array}$$

Avant d'écrire la composition, on souligne qu'il ne faut pas confondre l'index de sommation, dont le symbole n'a aucune importance, avec les variables fixées n, m de $\check{z}(n)$ et $\hat{z}(m)$. Pour éviter ce problème, on utilise j comme symbole de sommation de la première transformation, qui est celle écrite à l'intérieur de l'expression composée. Pour tout $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$,

$$\begin{aligned} \check{\hat{z}}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) e^{2\pi i \frac{mn}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left(\sum_{j=0}^{N-1} z(j) e^{-2\pi i \frac{mj}{N}} \right) e^{2\pi i \frac{mn}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} z(j) e^{2\pi i m \frac{n-j}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} z(j) \left(\sum_{m=0}^{N-1} e^{2\pi i m \frac{n-j}{N}} \right) \\ &\stackrel{\text{(Lemme 2.3)}}{=} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} z(j) N \delta_{j,n} = z(n). \end{aligned}$$

Maintenant on vérifie que la composition inverse donne encore l'identité :

$$\begin{array}{ccccc} \ell_N & \xrightarrow{\text{IDFT}} & \ell_N & \xrightarrow{\text{DFT}} & \ell_N \\ z & \longmapsto & \check{z} & \longmapsto & \hat{\check{z}} = z. \end{array}$$

Pour tout $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

$$\begin{aligned}
\hat{z}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} \check{z}(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} z(j) e^{2\pi i \frac{jn}{N}} \right) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} z(j) e^{2\pi i n \frac{j-m}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} z(j) \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n \frac{j-m}{N}} \right) \\
&\stackrel{(\text{Lemme 2.3})}{=} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} z(j) N \delta_{j,m} = z(m).
\end{aligned}$$

Donc pour tout $n, m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, $\check{z}(n) = z(n)$ et $\hat{z}(m) = z(m)$ et le théorème est prouvé. \square
On note la grande similarité entre DFT et IDFT : seulement le coefficient $1/N$ et le signe de l'exponentiel complexe changent. Il est utile de souligner les formules que l'on vient de démontrer :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{Z}, \check{z}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) e^{2\pi i \frac{mn}{N}} = z(n), \\
\forall m \in \mathbb{Z}, \hat{z}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} \check{z}(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} = z(m).
\end{aligned}$$

Définition 2.13. On appelle le couple $(z, \hat{z}) \in \ell_N \times \ell_N$ un **couple de Fourier**.

Remarque 2.14. Notons ici que \hat{z} et \check{z} sont par construction périodiques : si $a \in \mathbb{Z}$, on obtient que :

$$\hat{z}(m + aN) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{(m+aN)n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} e^{-2\pi i \frac{aNn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} e^{-2\pi i an} = \hat{z}(m),$$

car $e^{-2\pi i an} = 1$. Avec le même calcul on montre que $\check{z}(n + aN) = \check{z}(n) \forall a \in \mathbb{Z}$. Donc, les définitions de \hat{z} et \check{z} se prolongent automatiquement à \mathbb{Z} tout entier.

2.3.3 La base (orthonormale) de Fourier réelle

On peut écrire la base de Fourier et la DFT avec une notation réelle. L'avantage d'avoir une base de Fourier réelle est que, si z est réel, alors on peut éviter l'introduction de composantes imaginaires. On considère simplement la base de Fourier orthonormale pour simplicité.

On distingue si N est pair ou impair. On commence par le cas N pair : $N = 2M$, $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 1$. Alors, $\forall n = 0, 1, \dots, N-1$, on écrit :

$$\begin{cases} c_0(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \\ c_m(n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left(\frac{2\pi mn}{N}\right) & m = 1, 2, \dots, M-1 \\ c_M(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cos\left(\frac{2\pi \frac{N}{2} n}{N}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{N}} \\ s_m(n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(\frac{2\pi mn}{N}\right) & m = 1, 2, \dots, M-1. \end{cases}$$

Si $N = 2M + 1$ est impair, alors on définit encore c_0, c_m et s_m comme ci-dessus, mais bien sûr le cas $m = N/2$ ne doit pas être considéré car $N/2$ dans ce cas n'est pas un nombre entier.

Théorème 2.15. *La collection $\{c_0, c_1, \dots, c_{M-1}, c_M, s_1, \dots, s_{M-1}\}$ quand $N = 2M$ ou la collection $\{c_0, c_1, \dots, c_{M-1}, s_1, \dots, s_{M-1}\}$ quand $N = 2M + 1$ est une base orthonormale de ℓ_N . Donc, pour tout $z \in \ell_N$:*

$$z = \sum_{m=0}^M \langle z, c_m \rangle c_m + \sum_{m=1}^{M-1} \langle z, s_m \rangle s_m \quad (N = 2M), \quad z = \sum_{m=0}^{M-1} \langle z, c_m \rangle c_m + \sum_{m=1}^{M-1} \langle z, s_m \rangle s_m \quad (N = 2M + 1)$$

Définition 2.16. *On appelle base orthonormale réelle de Fourier de ℓ_N l'ensemble de suites de ℓ_N $\{c_0, c_1, \dots, c_{M-1}, c_M, s_1, \dots, s_{M-1}\}$ quand $N = 2M$, ou l'ensemble de suites de ℓ_N $\{c_0, c_1, \dots, c_{M-1}, s_1, \dots, s_{M-1}\}$ quand $N = 2M + 1$.*

La relation avec les coefficients de Fourier est donnée par les formules suivantes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle z, c_0 \rangle = \frac{\hat{z}(0)}{\sqrt{N}} \\ \langle z, c_M \rangle = \frac{\hat{z}(M)}{\sqrt{N}} \\ \langle z, c_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{2N}} (\hat{z}(m) + \hat{z}(N - m)), \quad m = 1, 2, \dots, M - 1 \\ \langle z, s_m \rangle = \frac{-i}{\sqrt{2N}} (\hat{z}(m) - \hat{z}(N - m)), \quad m = 1, 2, \dots, M - 1 \\ \hat{z}(0) = \sqrt{N} \langle z, c_0 \rangle \\ \hat{z}(M) = \sqrt{N} \langle z, c_M \rangle \\ \hat{z}(m) = \sqrt{N/2} (\langle z, c_m \rangle - i \langle z, s_m \rangle), \quad m = 1, 2, \dots, M - 1 \\ \hat{z}(m) = \sqrt{N/2} (\langle z, c_{N-m} \rangle + i \langle z, s_{N-m} \rangle), \quad m = M + 1, M + 2, \dots, N - 1. \end{array} \right.$$

2.4 Interprétation matricielle de la DFT et IDFT

Rappelons la définition de $\omega_1 := e^{\frac{2i\pi}{N}}$ (voir (2.1)). On note ici

$$\alpha := \bar{\omega}_1 = e^{-\frac{2i\pi}{N}}. \quad (2.24)$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 2.17 (Matrice représentative de la DFT). *La matrice représentative de DFT : $(\ell_N, B) \rightarrow (\ell_N, B)$ dans la base canonique B de ℓ_N (voir Définition 2.3) est*

$$W_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \dots & \alpha^{N-1} \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^6 & \dots & \alpha^{2(N-1)} \\ 1 & \alpha^3 & \alpha^6 & \alpha^9 & \dots & \alpha^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha^{N-1} & \alpha^{2(N-1)} & \alpha^{3(N-1)} & \dots & \alpha^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}.$$

La matrice W_N est dite de **matrice de Vandermonde-Fourier**¹. Elle est symétrique ($W_N = W_N^t$) et inversible.

1. Alexandre-Théophile Vandermonde (1735 Paris - 1796 Paris).

Démonstration. Pour tout $n, m \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$\hat{e}_n(m) = \sum_{k=0}^{N-1} e_n(k) e^{-\frac{2i\pi km}{N}}.$$

Or, par définition de la base canonique, $e_n(k) = \delta_{n,k}$ et donc $\hat{e}_n(m) = e^{-\frac{2i\pi mn}{N}} = \alpha^{nm}$. D'où le résultat. W_N est clairement symétrique et le fait qu'elle soit inversible vient du fait que la DFT est bijective. \square

De même, on a un résultat semblable pour la IDFT :

Proposition 2.18 (Matrice représentative de la IDFT). *La matrice représentative de la IDFT : $(\ell_N, B) \rightarrow (\ell_N, B)$ dans la base canonique B de ℓ_N est $\frac{1}{N}W_N^*$.*

Proof of Proposition 2.18. On a de même, pour tout $n, m \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$\check{e}_n(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e_n(k) e^{\frac{2i\pi mk}{N}}.$$

Or, $e_n(k) = \delta_{n,k}$ et donc $\check{e}_n(m) = \frac{1}{N} e^{\frac{2i\pi mn}{N}} = \frac{1}{N} \bar{\alpha}^{nm}$, ce qui donne le résultat. \square

Un corollaire immédiat du fait que l'inverse de la DFT est l'IDFT est

Corollaire 2.19. *On a la relation*

$$W_N^{-1} = \frac{1}{N} W_N^*. \quad (2.25)$$

En particulier, la matrice $\frac{1}{\sqrt{N}}W_N$ est unitaire.

Exemples :

— $N = 2$: $\alpha = e^{-2\pi i/2} = -1$, donc

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

d'où :

$$W_2^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

— $N = 3$: $\alpha = e^{-2\pi i/3} = j^2 = \bar{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc

$$W_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j^4 \\ 1 & j^4 & j^8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \bar{j} & j \\ 1 & j & \bar{j} \end{pmatrix},$$

d'où :

$$W_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

La matrice inverse est :

$$W_3^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

— $N = 4$: $\alpha = e^{-2\pi i/4} = -i$, donc

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & (-i)^2 & (-i)^3 \\ 1 & (-i)^2 & (-i)^4 & (-i)^6 \\ 1 & (-i)^3 & (-i)^6 & (-i)^9 \end{pmatrix},$$

d'où :

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

La matrice inverse est :

$$W_4^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

2.4.1 « FFT » : Fast Fourier Transform

On vient de voir que l'action de la DFT sur un signal $z \in \ell_N$ peut être représentée comme un produit matriciel. Par conséquent, on a besoin de calculer N multiplications pour chaque élément $\hat{z}(m)$ de la suite $\hat{z} \in \ell_N$. Comme \hat{z} a N composantes, l'algorithme de calcul de la DFT a une complexité de $\mathcal{O}(N^2)$.

Pour des signaux de grande dimension, cette complexité implique que la DFT est très lente, c'est pour cela que la transformée de Fourier a été utilisée presque seulement dans un cadre théoriques, plutôt que dans les applications, jusqu'aux années 60 du XX siècle.

Heureusement, **Cooley et Tukey**, en 1965, ont utilisé des symétries cachées dans la DFT pour construire un algorithme rapide pour le calcul de la DFT, ils ont appelé l'algorithme Fast Fourier Transform « FFT ». La FFT a une complexité de l'ordre de $\mathcal{O}(N \log N)$ et elle permet de calculer la transformée de Fourier d'un signal de grande dimension dans l'ordre d'une fraction de secondes avec les ordinateurs modernes. En particulier, la FFT est très efficace quand la dimension des signaux est une puissance de 2 (cela explique pourquoi le format typique des images numériques est de 512 ou 1024).

2.5 La transformée de Fourier dans le traitement des signaux

La théorie de Fourier est appliquée à beaucoup de domaines, par exemple la résolution des équations différentielles ordinaires et partielles, la physique classique et quantique, les statistiques et probabilités et le traitement des signaux. C'est surtout dans le premier et le dernier domaine que l'on appliquera les résultats de l'analyse de Fourier. Dans cette section, on considère le cas du traitement des signaux en dimension 1 (1D).

2.5.1 La formule de synthèse des signaux 1D : décomposition sur la base des harmoniques

Un signal discret 1D de dimension N peut être défini comme l'ensemble des N échantillons d'une variable, qui peut être dépendant du temps, d'une dimension spatiale (x, y ou z), ou d'un autre paramètre avec un seul degré de liberté. Deux exemples remarquables de signaux discret 1D qui dépendent du temps ou d'une dimension spatiale sont :

- l'ensemble de valeurs d'intensité d'un morceau de musique échantillonné pour N instants différents ;
- l'ensemble de valeurs de niveau de gris d'une ligne ou d'une colonne d'une image échantillonné pour N positions différentes.

On peut traiter un signal discret 1D dans le cadre de la théorie de Fourier avec les identifications basiques suivantes :

- la représentation mathématique abstraite d'un signal discret 1D est donnée par une suite $z \in \ell_N$;
- $n \in \mathbb{Z}_N = \{0, 1, \dots, N - 1\}$ représente les valeurs du paramètre (temps, dimension spatiale, etc.) où est mesuré le signal ;
- l'énergie du signal z est associée à la norme carrée $\|z\|^2$.

Dans ce cadre, on interprète les formules (2.18) et (2.21) comme, respectivement, une formule d'analyse et une formule de synthèse :

$$\text{Formule d'analyse : } \forall m \in \mathbb{Z}, \hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}},$$

$$\text{Formule de synthèse : } \forall n \in \mathbb{Z}, z(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) e^{2\pi i \frac{mn}{N}}.$$

Ces formules se comprennent de la façon suivante : pour manipuler un signal audio (dont un exemple est donné en 2.1), on peut avoir besoin de lui associer une expression analytique. Pour ce faire, il est possible de calculer les coefficients de Fourier $\hat{z}(m)$ de ce signal (via la

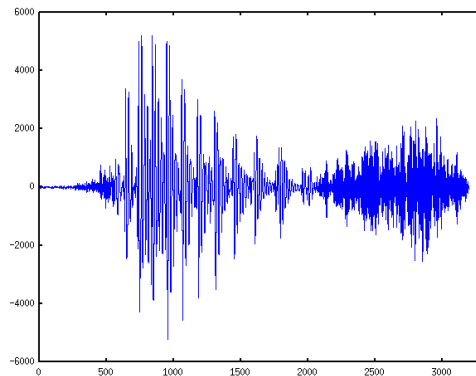


FIGURE 2.1 – Un exemple de signal audio.

formule d'analyse). La formule de synthèse dit alors qu'il est alors possible de reconstruire le signal z au paramètre n grâce à la connaissance des coefficients de Fourier $\hat{z}(m)$ selon une combinaison linéaire d'ondes $e^{2\pi i \frac{mn}{N}}$ dont les fréquences sont multiples de $1/N$, modulées par le coefficient de multiplication $m : \{0, 1/N, 2/N, \dots, (N - 1)/N\}$. Quand $m = 0$ on n'a pas

d'oscillations, mais à partir de $m = 1$ jusqu'à $m = N - 1$ les fonctions $e^{2\pi i \frac{m}{N} n}$ oscillent avec une certaine fréquence (voir section 2.5.3 pour plus de détails).

Définition 2.20 (Harmoniques). *La fonction $n \mapsto e^{2\pi i \frac{1}{N} n}$ est dite harmonique (discrète)² fondamentale et les fonctions $n \mapsto e^{2\pi i \frac{m}{N} n}$ pour $m = 1, 2, \dots, N - 1$ sont dites harmoniques (discrètes) d'ordre supérieur.*

2.5.2 Signification des coefficients de Fourier et spectre d'un signal 1D

Si le signal discret z dépend du temps t (ou d'une dimension spatiale x), alors on dit que la transformation $z \rightarrow \hat{z}$ réalisée par la DFT permet de passer de la **représentation temporelle (ou spatiale)** du signal à la **représentation fréquentielle**, ou à l'**espace de Fourier**. La transformée de Fourier est souvent définie comme *l'équivalent du prisme de Newton pour les mathématiques*. Le prisme de Newton permet de décomposer la lumière dans les composantes fréquentielles « cachées » qui correspondent aux couleurs spectrales. La transformée de Fourier nous permet de mettre en évidence les composantes fréquentielles « cachées » dans un signal quelconque.

Chaque coefficient de Fourier $\hat{z}(m) \in \mathbb{C}$ peut être écrit ainsi :

$$\hat{z}(m) = a(m) + ib(m) = |\hat{z}(m)|e^{i\text{Arg}(\hat{z}(m))}$$

où $|\hat{z}(m)| = \sqrt{a(m)^2 + b(m)^2}$ est le module du coefficient de Fourier $\hat{z}(m)$ et $\text{Arg}(\hat{z}(m)) = \arctan\left(\frac{b(m)}{a(m)}\right)$ est son argument. On interprète alors le module du coefficient de Fourier $\hat{z}(m)$ comme le poids qui mesure l'importance de chaque harmonique $e^{2\pi i \frac{mn}{N}}$ dans la reconstruction du signal z :

$|\hat{z}(m)|$: **mesure de l'importance de l'harmonique $e^{2\pi i \frac{mn}{N}}$ dans la reconstruction de z .**

Ces considérations permettent de donner les définitions suivantes :

Définition 2.21. *Pour $z \in \ell_N$, on appelle :*

- $\{|\hat{z}(m)|, m \in \mathbb{Z}_N\}$: **spectre d'amplitude** de z , ou plus simplement **spectre** de z ;
- $\{|\hat{z}(m)|^2, m \in \mathbb{Z}_N\}$: **spectre de puissance** de z ;
- $\{\text{Arg}(\hat{z}(m)), m \in \mathbb{Z}_N\}$: **spectre de phases** de z .

Dans ce contexte, l'interprétation de l'identité de Plancherel est la suivante : l'énergie totale du signal se décompose comme la somme des énergies associées à chaque harmonique. Notons aussi qu'un coefficient parmi les coefficients de Fourier joue un rôle particulier : $\hat{z}(0)$, qui donne une information sur la valeur moyenne de z :

$$\hat{z}(0) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n)e^{2\pi i \frac{0n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) = N\langle z \rangle \implies \boxed{\hat{z}(0) = N\langle z \rangle},$$

où $\langle z \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z(n)$ est la valeur moyenne du signal z . Si on introduit cette expression de $\hat{z}(0)$ dans la formule de synthèse et on sépare le premier terme du reste de la sommation on

2. On spécifie le fait que les harmoniques sont discrètes, car les harmonique continues sont données par les fonctions $t \mapsto e^{2\pi i \nu t} = e^{i\omega t}$, où ν est la fréquence et $\omega = 2\pi\nu$ est la pulsation.

obtient :

$$z(n) = \frac{1}{N} N \langle z \rangle + \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N-1} \hat{z}(m) e^{2\pi i \frac{mn}{N}}, \quad \text{i.e.} \quad \boxed{z(n) = \langle z \rangle + \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N-1} \hat{z}(m) e^{2\pi i \frac{mn}{N}}}.$$

On dit que le coefficient de Fourier $\hat{z}(0)$ est la composante « DC » de la formule de synthèse, tandis que les autres termes constituent la composante « AC ». Cette nomenclature vient de l'électrotechnique, où on appelle le courant continue DC « Direct Current » (courant de fréquence nulle) et le courant alternatif AC « Alternating Current ».

2.5.3 Hautes et basses fréquences m dans la formule de synthèse

On veut comprendre plus en profondeur la signification des coefficients fréquentiels m dans l'ensemble d'harmoniques :

$$\left\{ e^{2\pi i \frac{mn}{N}} = \cos\left(2\pi \frac{mn}{N}\right) + i \sin\left(2\pi \frac{mn}{N}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \right\},$$

qui représente la valeur des harmoniques dans chacun des N paramètres n . Pour simplifier l'analyse, on considère seulement la partie réelle de l'ensemble ci-dessus, i.e.

$$H_m = \left\{ \cos\left(2\pi \frac{mn}{N}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \right\},$$

les considérations faites sur le cosinus pouvant être répétées pour le sinus.

Discutons du comportement de $\cos\left(2\pi \frac{mn}{N}\right)$ quand m prend les valeurs de 0 jusqu'à $N-1$, N pair (on discutera plus tard du cas N impair) :

- $m = 0$: comme on l'a déjà vu, dans ce cas *on a pas d'oscillations*, mais une suite de valeurs constantes, $\cos\left(2\pi \frac{0n}{N}\right) = 1$, donc

$$H_0 = \{1, 1, \dots, 1\};$$

- $m = 1$:

$$H_1 = \left\{ 1, \cos\left(2\pi \frac{1}{N}\right), \cos\left(2\pi \frac{2}{N}\right), \dots, \cos\left(2\pi \frac{N-1}{N}\right) \right\},$$

les valeurs de H_1 représentent N échantillons d'une *oscillation du cosinus*. Le cycle n'est pas terminé car on ne considère pas la valeur $n = N$, qui permettrait d'obtenir $\cos\left(2\pi \frac{N}{N}\right) = \cos(2\pi) = 1$. Dans la figure 2.2 on montre le graphe de H_m pour $m = 1$, $N = 16$.

- $m = 2$:

$$H_2 = \left\{ 1, \cos\left(2\pi \frac{2}{N}\right), \cos\left(2\pi \frac{4}{N}\right), \dots, \cos\left(2\pi \frac{2\frac{N}{2}}{N}\right) = 1, \dots, \cos\left(2\pi \frac{2(N-1)}{N}\right) \right\},$$

les valeurs de H_2 représentent N échantillons de *deux oscillations du cosinus*. En fait, en correspondance de $n = N/2$, un cycle du cosinus est terminé. Dans la figure 2.3 on montre le graphe de H_m pour $m = 2$, $N = 16$. On voit que pour $n = 8 = 16/2$ la valeur du cosinus est 1.

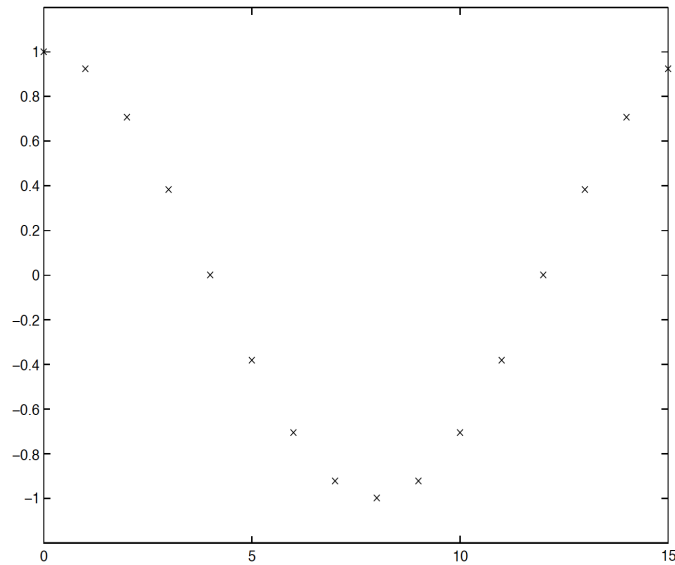


FIGURE 2.2 – H_m pour $m = 1, N = 16$.

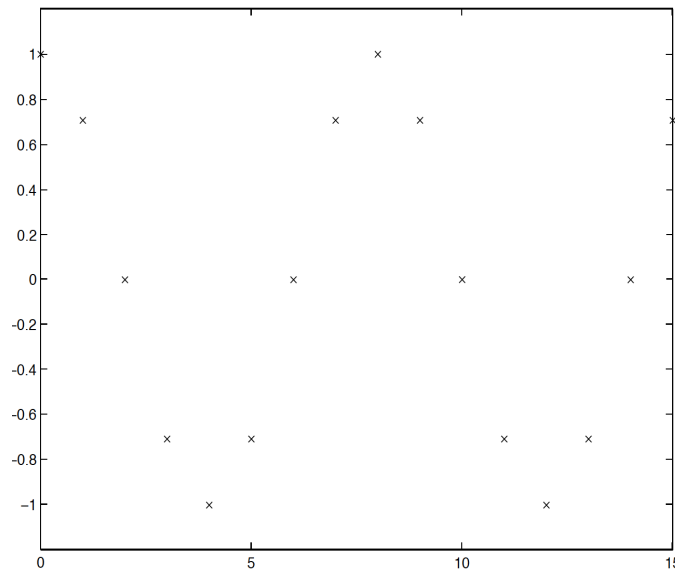


FIGURE 2.3 – H pour $m = 2, N = 16$.

- Si on augmente m jusqu'à $N/2$, on augmente la fréquence des oscillations du cosinus, comme le montre la figure 2.4, qui représente le graphe de H_m avec $m = 7, N = 16$. La fréquence maximale est obtenue quand $m = N/2$, en fait, dans ce cas, $\cos\left(2\pi\frac{N}{2}\frac{n}{N}\right) = \cos(\pi n)$, donc

$$H_{\frac{N}{2}} = \{(-1)^n, n = 0, 1, \dots, N - 1\}$$

comme le montre la figure 2.5 avec le graphe de H_m pour $m = 8, N = 16$.

- On pourrait penser que la fréquence des oscillations du cosinus augmente jusqu'à $N - 1$, mais ceci n'est pas vrai. En fait, à partir de $n = N/2 + 1$, la fréquence des oscillations

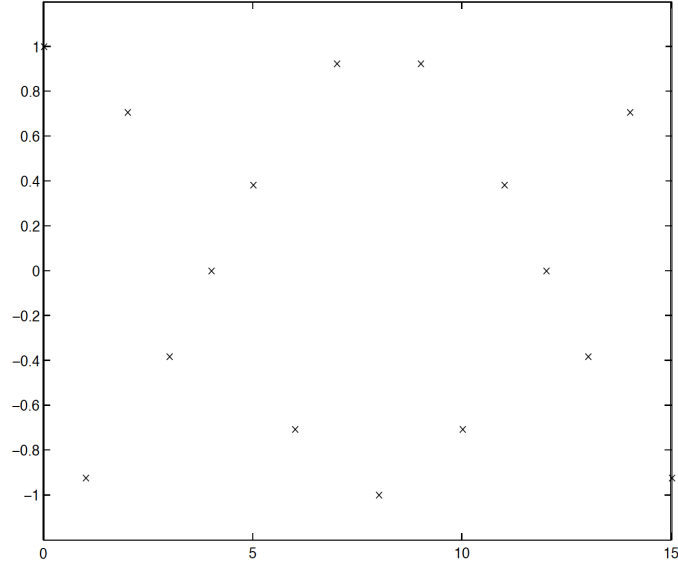


FIGURE 2.4 – H_m pour $m = 7, N = 16$.

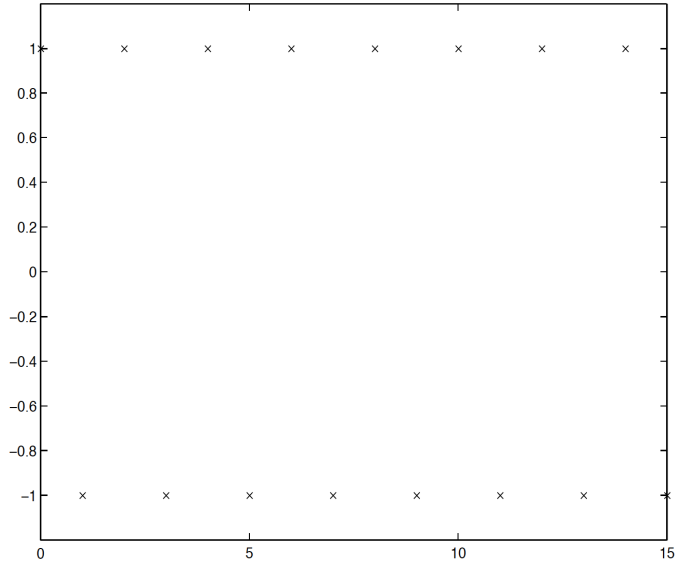


FIGURE 2.5 – H_m pour $m = 8, N = 16$.

du cosinus décroît. Pour comprendre ce comportement, on considère $\cos\left(2\pi\frac{nm}{N}\right)$ quand $m \in \left\{\frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots, N - 1\right\}$ et on fait un changement de variable :

$$k = N - m \Leftrightarrow m = N - k, \quad m \in \left\{\frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots, N - 1\right\} \Leftrightarrow k \in \left\{\frac{N}{2} - 1, \dots, 2, 1\right\},$$

donc quand m croît de $\frac{N}{2} + 1$ jusqu'à $N - 1$, k décroît de $\frac{N}{2} - 1$ jusqu'à 1. Si on introduit le changement de variable dans le cosinus on obtient :

$$\cos\left(2\pi\frac{n(N-k)}{N}\right) = \cos\left(2\pi n - 2\pi\frac{nk}{N}\right) = \cos\left(-2\pi\frac{nk}{N}\right) = \cos\left(2\pi\frac{nk}{N}\right),$$

on a utilisé la périodicité et la parité du cosinus.

Par conséquent,

$$\cos\left(2\pi\frac{nm}{N}\right), m \in \left\{\frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots, N - 1\right\} \Leftrightarrow \cos\left(2\pi\frac{nk}{N}\right), k \in \left\{\frac{N}{2} - 1, \dots, 1\right\},$$

Donc, **le nombre d'oscillations harmoniques est maximal pour $m = N/2$ et symétrique par rapport à cette valeur**. Par exemple, le graphe de H_m pour $m = 9, N = 16$ est exactement égal au graphe de la figure 2.4, qui représente le graphe de H_m avec $m = 7, N = 16$. Ainsi comme le graphe de $m = 15, N = 16$ est exactement égal au graphe de la figure 2.2, qui représente le graphe de H_m avec $m = 1, N = 16$.

- Bien sûr, si N est *impair*, alors ce que l'on vient de dire est valide pour $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$, la partie entière de $\frac{N}{2}$.

Les considérations précédentes expliquent pourquoi on appelle :

- **Hautes fréquences** : les valeurs de m proches de $\frac{N}{2}$;
- **Basses fréquences** : les valeurs de m proches de 0 ou à $N - 1$.

Donc, si dans la formule de synthèse d'un signal discret $z \in \ell_N$ on a des coefficients de Fourier $\hat{z}(m)$ avec un module élevé pour des valeurs de m proches de $N/2$, le signal sera caractérisé par des variations plutôt violentes (par exemple un son aigu, comme pour les *cymbales*). Par contre, si les coefficients de Fourier avec le module plus élevé correspondent à des valeurs de m proches de 0 et à $N - 1$, alors le signal sera caractérisé par des variations plus douces (par exemple un bruit grave, comme pour les *tambours*).

La fréquence $m = N/2$ est dite **fréquence de Nyquist**³. Elle est la fréquence harmonique la plus élevée qui peut être représentée avec N échantillons d'un signal. On reviendra sur ce point très important quand on discutera le théorème d'échantillonnage.

Un exemple utile est donné par un « chirp » (gazouillis), i.e. un signal avec des oscillations qui deviennent de plus en plus rapides, typique de certains oiseaux, mais aussi de certaines images, comme dans la figure 2.6.

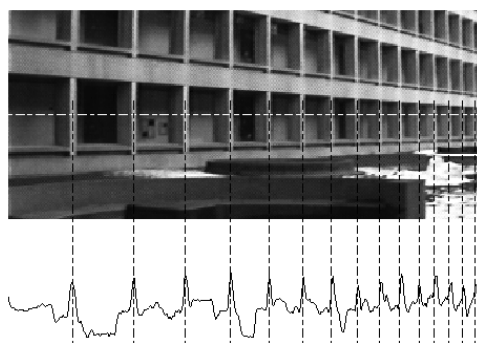


FIGURE 2.6 – Chirp obtenu via une « scanline », i.e. les valeurs d'intensité des pixels d'une ligne d'une image numérique.

La modélisation d'un chirp discret est la suivante :

$$z(n) = \sin\left(\frac{\pi n^2}{T}\right), \quad n \in \mathbb{Z}_N, \quad (2.30)$$

3. Harry Nyquist, ingénieur suédois (1889-1976).

dans la figure 2.7 on montre trois différents chirps avec $T = 256, 512, 1024$, tous échantillonnés avec $N = 128$. Les graphes des modules des coefficients de Fourier de ces chirps sont montrés dans la figure 2.8. On voit que le coefficients de Fourier $\hat{z}(m)$ avec m proches à $m = 128/2 = 64$ ont un module non négligeable seulement pour le premier chirp, qui a des fréquence élevées. Par contre, pour les deux dernier chirps, seulement les coefficients de Fourier $\hat{z}(m)$ avec m proches à $m = 0$ et $m = 128$ ont un module non négligeable.

2.5.4 Visualisation du spectre d'amplitude

La caractérisation des hautes fréquences m comme celles proches à $N/2$ n'est pas intuitive. Pour éviter ce problème, certains auteurs identifient \mathbb{Z}_N aux ensembles suivants :

$$\text{Si } N = 2M \text{ (paire), } \mathbb{Z}_N = \{-M + 1, -M + 2, \dots, -1, 0, 1, \dots, M - 1, M\}, \quad (2.31)$$

$$\text{Si } N = 2M + 1 \text{ (impaire), } \mathbb{Z}_N = \{-M, -M + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, M - 1, M\}. \quad (2.32)$$

Grâce à ces translations, les hautes fréquences correspondent aux valeurs de m proches à M et les basses fréquences aux valeurs de m proches de 0. La figure 2.9 montre comment les spectres d'amplitude de figure 2.8 changent avec la translation.

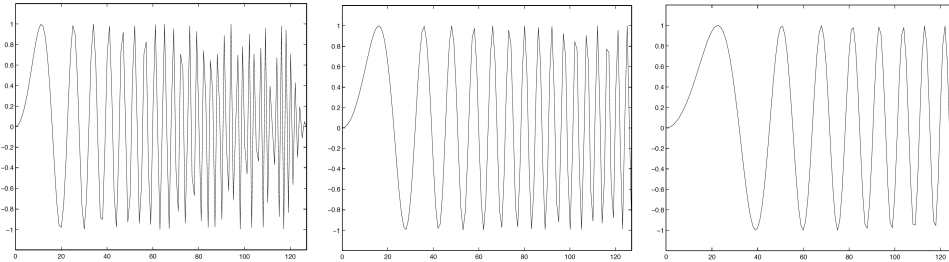


FIGURE 2.7 – De gauche à droite : chirps obtenus avec la formule (2.30), $T = 256, 512, 1024$ et $N = 128$. Abscisses : n , ordonnées : $z(n)$.

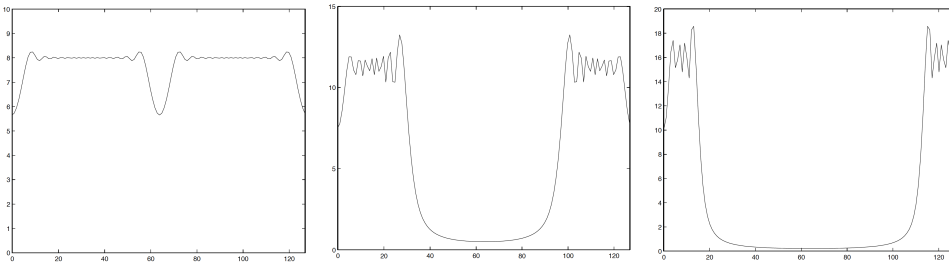


FIGURE 2.8 – De gauche à droite : modules des coefficients de Fourier des chirps de la figure 2.7. Abscisses : m , ordonnées : $|\hat{z}(m)|$.

On peut observer que le chirp avec des fréquences plus élevées a un spectre d'amplitude qui s'étale loin de la fréquence centrale, par contre les deux chirps avec fréquences plus basses ont leur spectres d'amplitude confinés à côté de la région centrale.

Dans les trois cas, on note que l'amplitude de $\hat{z}(0)$ est petite, cela est dû au fait que les oscillations positives et négatives tendent à se balancer et donc que $\langle z \rangle$ tend vers 0.

Le code Matlab pour générer les graphes des spectres d'amplitude est disponible ci-dessous.

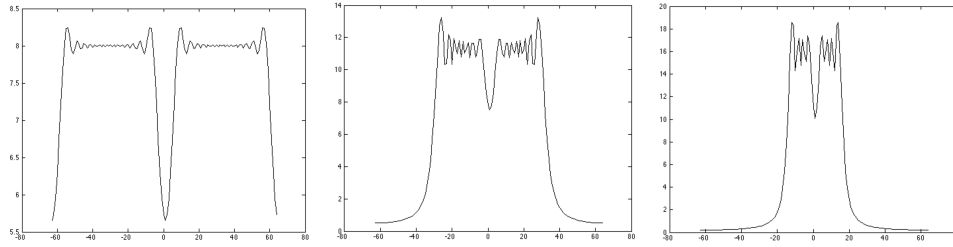


FIGURE 2.9 – De gauche à droite : modules des coefficients de Fourier des chirps de la figure 2.7 **translatés** pour avoir les basses fréquences dans le centre et les hautes aux côtés gauche et droit. Abscisses : m , ordonnées : $|\hat{z}(m)|$.

```

1 % samples
2 n=0:127;
3 % signals
4 z1=sin(pi*n.^2/256); z2=sin(pi*n.^2/512); z3=sin(pi*n.^2/1024);
5 % non centered amplitude spectra
6 w1=abs(fft(z1)); w2=abs(fft(z2)); w3=abs(fft(z3));
7 % centered amplitude spectra, fftshift implements the centering
8 v1=abs(fftshift(fft(z1))); v2=abs(fftshift(fft(z2))); ...
   v3=abs(fftshift(fft(z3)));
9 %graphs:
10 subplot(3,3,1); plot(n,z1); subplot(3,3,2); plot(n,z2); subplot(3,3,3); ...
   plot(n,z3);
11 subplot(3,3,4); plot(n,w1); subplot(3,3,5); plot(n,w2); subplot(3,3,6); ...
   plot(n,w3);
12 subplot(3,3,7); plot(n,v1); subplot(3,3,8); plot(n,v2); subplot(3,3,9); ...
   plot(n,v3);

```

2.5.5 Filtrage de signaux dans la représentation fréquentielle

Grâce à la DFT on peut modifier très facilement le contenu fréquentiel d'un signal, par exemple pour augmenter l'importance des basses ou des hautes fréquences.

Le schéma standard consiste à passer à l'espace de Fourier avec la DFT puis à manipuler les coefficients de Fourier, selon nos besoins, avec un *filtre* $f : \ell_N \rightarrow \ell_N$, qui peut être une transformation linéaire ou non-linéaire. On termine par l'application de la IDFT à la suite des coefficients de Fourier modifiés pour reconstruire le signal original avec les modifications fréquentielles désirées (voir Figure 2.10).

Parmi tous les filtres f , il existe un filtre très important, que l'on va définir dans la sous-section 2.5.6 et qui nous permettra de définir le concept de multiplicateur de Fourier dans la sous-section 2.5.7.

2.5.6 L'opérateur de multiplication et sa représentation matricielle diagonale

Soit $w : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}$ une suite fixé de ℓ_N .

Définition 2.22. On appelle *opérateur de multiplication* par la suite w , l'application linéaire ci-dessous :

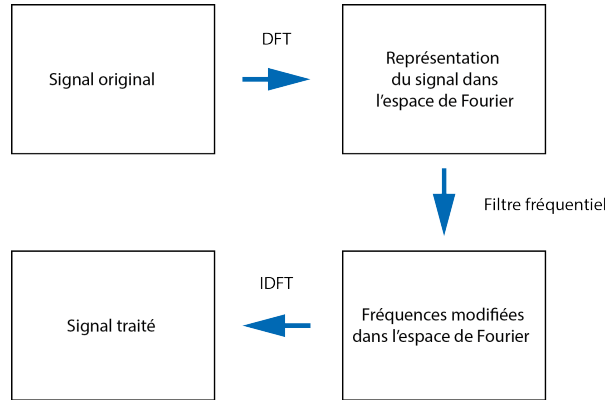


FIGURE 2.10 – Schéma d'un filtrage dans le domaine de Fourier.

$$M_w : \ell_N \longrightarrow \ell_N \\ z \longmapsto M_w(z) = w \cdot z,$$

où $M_w(z) = w \cdot z : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}$ est la suite définie par produit ponctuel entre w et z :

$$\boxed{M_w z(n) = (w \cdot z)(n) = w(n) \cdot z(n)} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_N.$$

On observe que, si on représente z comme un vecteur colonne dans la base canonique de ℓ_N , alors la matrice associée à l'opérateur M_w par rapport à la base canonique de ℓ_N est une matrice diagonale D_w qui a comme éléments diagonaux les composantes de la suite w , en fait :

$$D_w z = \begin{pmatrix} w(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w(N-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(0) \\ \vdots \\ z(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(0)z(0) \\ \vdots \\ w(N-1)z(N-1) \end{pmatrix}.$$

Exemple d'opérateur de multiplication : on considère la suite de $\ell^2(\mathbb{Z}_6)$ donnée par $z = (2, 3 - i, 2i, 4 + i, 0, 1)$ et la suite $w(n) = i^n$, $n \in \mathbb{Z}_6$, alors :

$$(w(0) = 1, w(1) = i, w(2) = -1, w(3) = -i, w(4) = 1, w(5) = i),$$

et donc

$$(M_w z)(n) = (1 \cdot 2, i \cdot (3 - i), -1 \cdot 2i, -i \cdot (4 + i), 1 \cdot 0, i \cdot 1) = (2, 3i + 1, -2i, -4i + 1, 0, i).$$

On peut maintenant introduire le multiplicateur de Fourier.

2.5.7 Le multiplicateur de Fourier et l'égalisateur graphique

Ici on va donner un exemple remarquable de filtre fréquentiel, dit multiplicateur de Fourier, que l'on va rencontrer aussi dans la section 2.7.

Définition 2.23. *Donnée une suite $w : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}$, on appelle **multiplicateur de Fourier** par la suite w , l'opérateur ci-dessous :*

$$\begin{aligned} T_{(w)} : \ell_N &\longrightarrow \ell_N \\ z &\longmapsto T_{(w)}(z) = \widetilde{w \cdot \hat{z}}, \end{aligned}$$

i.e. $T_{(w)}$ est l'opérateur donné par la composition suivante :

$$\boxed{T_{(w)} = \text{IDFT} \circ M_w \circ \text{DFT}},$$

i.e.

$$\begin{array}{ccccccc} \ell_N & \xrightarrow{\text{DFT}} & \ell_N & \xrightarrow{M_w} & \ell_N & \xrightarrow{\text{IDFT}} & \ell_N \\ z & \mapsto & \text{DFT}(z) = \hat{z} & \mapsto & M_w(\text{DFT}(z)) = w \cdot \hat{z} & \mapsto & \text{IDFT}(M_w(\text{DFT}(z))) = \widetilde{w \cdot \hat{z}}. \end{array}$$

L'action de $T_{(m)}$ sur les coefficients de Fourier de z est tout simplement la multiplication par les composantes de la suite w (ce qui explique le nom de l'opérateur). Donc, on peut :

- **Atténuer les basses fréquences** du signal z en choisissant une suite $w(m)$ avec $|w(m)|$ petit quand $m \simeq 0$ et $m \simeq N - 1$;
- **Atténuer les hautes fréquences** du signal z en choisissant une suite $w(m)$ avec $|w(m)|$ petit quand $m \simeq N/2$;
- **Booster (amplifier) les basses fréquences** du signal z en choisissant une suite $w(m)$ avec $|w(m)|$ grand quand $m \simeq 0$ et $m \simeq N - 1$;
- **Booster les hautes fréquences** du signal z en choisissant une suite $w(m)$ avec $|w(m)|$ grand quand $m \simeq N/2$.

Ceci est utilisé dans l'égalisateur graphique représenté dans la figure 2.11 pour régler le niveau des aigües et des basses dans un signal audio.

Bien évidemment, si on opère les translations de \mathbb{Z}_N définies par les formules (2.31) ou (2.32), le cas échéant, alors il faut définir à nouveau les suites $w(n)$ pour s'adapter au fait que, dans ce cas, les basses fréquences sont seulement celles proches de $m = 0$.

2.6 Propriétés de la DFT

Dans cette section on démontrera les plus importantes propriétés de la DFT. On commence par rappeler la propriété de translation de l'index d'une sommation :

$$\sum_{i=n_0}^n a_i = \sum_{i=n_0-k}^{n-k} a_{i+k} = \sum_{i=n_0+k}^{n+k} a_{i-k}, \quad (2.33)$$

que l'on utilisera souvent.

Lemme 2.24. *Soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction N -périodique, $N \in \mathbb{N}$:*

$$f(n + aN) = f(n) \quad \forall a, n \in \mathbb{Z}.$$

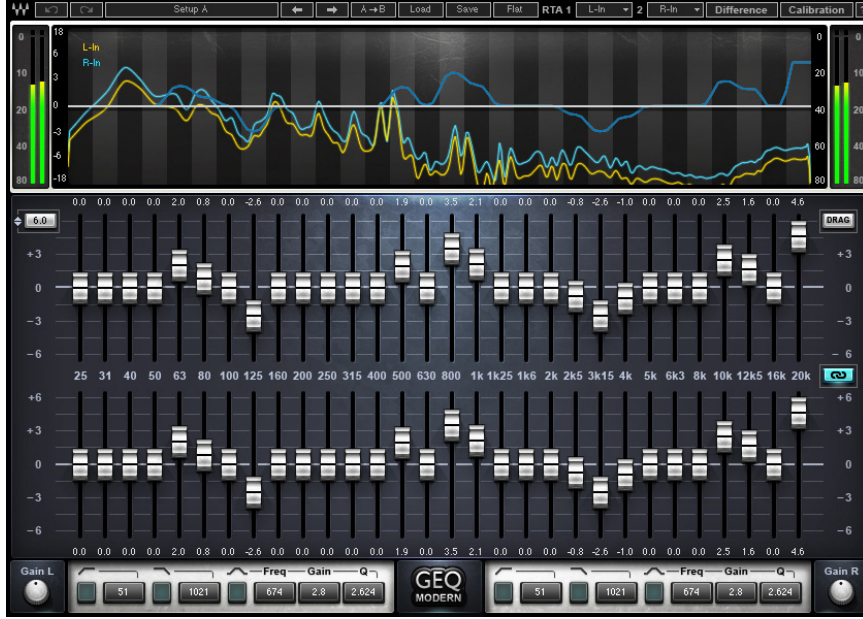


FIGURE 2.11 – Un exemple d'égalisateur graphique. On dit graphique car les fréquences sont ordonnées selon un graphe qui permet de comprendre d'une façon immédiate si la fréquence que l'on change est haute ou basse.

Alors, pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{\sum_{n=m}^{m+N-1} f(n) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)},$$

i.e. la somme de f (N -périodique) sur tout intervalle de taille N est constante.

Démonstration. Si $m = 0$ il n'y a rien à prouver, soit alors $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$. On commence par considérer $m > 0$:

$$\sum_{n=m}^{m+N-1} f(n) = \sum_{n=0}^{m+N-1} f(n) - \sum_{n=0}^{m-1} f(n) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) + \sum_{n=N}^{m+N-1} f(n) - \sum_{n=0}^{m-1} f(n),$$

mais, en utilisant (2.33),

$$\sum_{n=N}^{m+N-1} f(n) = \sum_{n=0}^{m-1} f(n+N) = \sum_{n=0}^{m-1} f(n)$$

grâce à la N -périodicité de f :

$$\sum_{n=m}^{m+N-1} f(n) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) + \sum_{n=0}^{m-1} f(n) - \sum_{n=0}^{m-1} f(n) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n).$$

Si $m < 0$, la démonstration est analogue. □

2.6.1 DFT et translation

On veut examiner maintenant comment varie la DFT d'un signal $z \in \ell_N$ si on fait une translation de z avec une quantité différente de N . Pour formaliser ceci, on va introduire un autre opérateur de ℓ_N .

Définition 2.25. Soit $z \in \ell_N$ une suite étendue par N -périodicité sur tout sous-ensemble de longueur N de \mathbb{Z} . On appelle **opérateur de translation à droite** de la quantité k , l'application linéaire ci-dessous :

$$\begin{aligned} R_k : \ell_N &\longrightarrow \ell_N \\ z &\longmapsto R_k(z), \end{aligned}$$

où $R_k(z) : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}$ est la suite définie par la formule :

$$\boxed{R_k z(n) = z(n - k)} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_N.$$

Exemple d'opérateur de translation : $N = 6$, $k = 2$, $z = (2, 3 - i, 2i, 4 + i, 0, 1)$. Alors :

$$\begin{cases} R_2 z(0) = z(0 - 2) = z(-2) = z(-2 + 6) = z(4) = 0 \\ R_2 z(1) = z(1 - 2) = z(-1) = z(-1 + 6) = z(5) = 1 \\ \vdots \end{cases}$$

on obtient : $R_2 z = (0, 1, 2, 3 - i, 2i, 4 + i)$, on voit que l'effet de R_2 sur z est juste de déplacer à droite de 2 positions les éléments de la suite (R pour *Right* en anglais). R_k est aussi appelé **opérateur de translation circulaire** ou *opérateur de rotation*.

On veut comprendre comment caractériser la composition de l'opérateur de translation avec la DFT et, inversement, de la DFT avec l'opérateur de translation. On commence avec la dernière composition : $\text{DFT}(z(n - k))$, i.e.

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \ell_N & \xrightarrow{R_k} & \ell_N & \xrightarrow{\text{DFT}} & \ell_N \\ z & \longmapsto & R_k z & \longmapsto & (\text{DFT} \circ R_k)z = \text{DFT}(R_k z) = \widehat{R_k z}. \end{array}}$$

Le théorème suivant montre que l'action de l'opérateur R_k est transformée par la DFT en la multiplication par une exponentielle complexe.

Théorème 2.26. Soit $z \in \ell_N$ une suite étendue par N -périodicité sur tout sous-ensemble de longueur N de \mathbb{Z} et soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$\boxed{\widehat{R_k z}(m) = e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \hat{z}(m)} \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad (2.34)$$

i.e. si on définit la suite $\omega_N^k \in \ell_N$, $\omega_N^k(m) = \omega_N^{mk} = e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \quad \forall m \in \mathbb{Z}$, alors :

$$\boxed{\text{DFT} \circ R_k = M_{\omega_N^k} \circ \text{DFT}}. \quad (2.35)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\widehat{R_k z}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} (R_k z)(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} z(n-k) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} \\
&= \sum_{n=-k}^{N-k-1} z(n-k+k) e^{-2\pi i \frac{m(n+k)}{N}} \\
&= \sum_{n=-k}^{N-k-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} e^{-2\pi i \frac{mk}{N}}.
\end{aligned}$$

Le facteur $e^{-2\pi i \frac{mk}{N}}$ ne dépend pas de l'index n , donc on peut le sortir de la sommation :

$$\begin{aligned}
\widehat{R_k z}(m) &= e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \sum_{n=-k}^{N-k-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} \\
&\stackrel{\text{(Lemme 2.24)}}{=} e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} = e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \hat{z}(m).
\end{aligned}$$

On a pu appliquer le lemme 2.24 car, par hypothèse, z est N -périodique et l'exponentielle $e^{-2\pi i \frac{mn}{N}}$ est elle-même une fonction N -périodique. \square

Remarque 2.27. On observe que, en écrivant $\hat{z}(m) = |\hat{z}(m)| e^{i \text{Arg}(\hat{z}(m))}$, comme $\left| e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \right| = 1$, le produit $e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \hat{z}(m)$ change seulement la phase de $\hat{z}(m)$.

Remarque 2.28. Le théorème ci-dessus montre une limitation importante de la transformée de Fourier. En fait :

$$\left| e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \right| = 1 \quad \implies \quad |\widehat{R_k z}(m)| = |\hat{z}(m)| \quad \forall m, k \in \mathbb{Z},$$

Ainsi, les modules des coefficients de Fourier de z et de toutes ses translations sont égaux. Par conséquent, **dans le module des coefficients de Fourier $|\hat{z}(m)|$, on a l'information sur l'importance de la fréquence m dans le signal z , mais pas de sa position dans le signal même.**

L'information sur la position des fréquences dans z est contenue dans la phase de \hat{z} , mais il n'est pas évident de l'interpréter. Une alternative est donnée par deux transformations qui localisent la transformée de Fourier : la transformée de Gabor et la transformée en ondelettes. L'étude de ces opérateurs va au delà du but de ce cours.

Maintenant on analyse la composition entre l'opérateur de translation et la DFT : $\hat{z}(m-k)$, i.e.

ℓ_N	$\xrightarrow{\text{DFT}}$	ℓ_N	$\xrightarrow{R_k}$	ℓ_N
z	\mapsto	$\text{DFT}(z)$	\mapsto	$(R_k \circ \text{DFT})z = \hat{z}(m-k)$.

Théorème 2.29. Avec les hypothèses du théorème 2.26, on a :

$$\boxed{(R_k \hat{z})(m) = \hat{z}(m - k) = \left(\widehat{e^{2\pi i \frac{nk}{N}} z} \right) (m)}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad (2.36)$$

i.e.

$$\boxed{R_k \circ \text{DFT} = \text{DFT} \circ M_{(\omega_N^k)^*}}. \quad (2.37)$$

Démonstration.

$$(R_k \hat{z})(m) = \hat{z}(m - k) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{(m-k)n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{2\pi i \frac{kn}{N}} z(n) \right) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} = \left(\widehat{e^{2\pi i \frac{kn}{N}} z} \right) (m).$$

□

Représentation originale	Espace de Fourier
$z(n - k)$	$e^{-2\pi i \frac{km}{N}} \hat{z}(m)$
$e^{2\pi i \frac{kn}{N}} z(n)$	$\hat{z}(m - k)$

L'opération de translation dans la représentation originale de z devient un changement de phase dans l'espace de Fourier et, inversement, l'opération de translation dans l'espace de Fourier correspond à un changement de phase (avec une phase conjuguée) dans la représentation originale de z .

Remarque 2.30. Un cas remarquable est donné par la situation suivante : N pair et $k = N/2$, alors :

$$e^{-\frac{2\pi i m \frac{N}{2}}{N}} = e^{-\pi i m} = (e^{-\pi i})^m = (-1)^m$$

et :

$$e^{\frac{2\pi i n \frac{N}{2}}{N}} = e^{\pi i n} = (e^{\pi i})^n = (-1)^n.$$

Alors :

$$\text{DFT} \left(z \left(m - \frac{N}{2} \right) \right) = (-1)^m \hat{z}(m), \quad \hat{z} \left(m - \frac{N}{2} \right) = \left(\widehat{(-1)^n z} \right) (m), \quad (2.38)$$

on voit que multiplier par $(-1)^n$ la suite z correspond à faire une translation de $N/2$ de son spectre. Cette opération est donc une alternative à la translation de l'espace des paramètres \mathbb{Z}_N (formules (2.31) et (2.32)) pour centrer le spectre en $m = 0$!

Pour terminer, une observation sur le rapport entre la formule (2.35) et la représentation diagonale de l'opérateur R_k . Si on compose les membres de gauche et de droite de la formule (2.35) avec la IDFT on obtient :

$$\text{DFT} \circ R_k \circ \text{IDFT} = M_{\omega_N^k}.$$

Si on écrit avec A_k et $D_{\omega_N^k}$ (diagonale, cfr. section 2.5.6) les matrices associées à l'opérateur R_k et $M_{\omega_N^k}$ par rapport à la base canonique, alors on peut réécrire l'équation antérieure comme ceci :

$$W_N A_k W_N^{-1} = D_{\omega_N^k},$$

qui montre que la matrice A_k associée à l'opérateur de translation R_k est semblable à la matrice diagonale $D_{\omega_N^k}$.

La matrice inversible qui réalise la conjugaison matricielle entre A_k et $D_{\omega_N^k}$ est la matrice de Vandermonde-Fourier W_N , donc on peut dire que l'action de l'opérateur de translation R_k est diagonale dans l'espace de Fourier. On reviendra sur le concept de diagonalisation d'un opérateur linéaire dans la sous-section 2.6.3 et, plus en profondeur, dans la section 2.7.

2.6.2 DFT et conjugaison

Pour toute une suite $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, on définit la suite complexe conjuguée z^* comme ceci : $z^* = (z^*(0), z^*(1), \dots, z^*(N-1))$, i.e. $z^*(n) = z(n)^* \forall n \in \mathbb{Z}_N$. Le théorème suivant montre la relation entre DFT et conjugaison.

Théorème 2.31. *Pour toute $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ ça vaut que :*

$$\hat{z}^*(m) = (\hat{z}(-m))^* = (\hat{z}(N-m))^* \quad \forall m \in \mathbb{Z}_N.$$

Démonstration.

$$\hat{z}^*(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n)^* e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} = \left(\sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{2\pi i \frac{mn}{N}} \right)^* = \left(\sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{(N-m)n}{N}} \right)^* = (\hat{z}(-m))^*,$$

$(\hat{z}(N-m))^* = (\hat{z}(-m))^*$ par périodicité. \square

Corollaire 2.32. *$z \in \ell_N$ est réelle, i.e. $z(n) \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{Z}_N$ si et seulement si*

$$\hat{z}(m) = (\hat{z}(-m))^* = (\hat{z}(N-m))^*.$$

Démonstration. Comme la DFT est un isomorphisme de ℓ_N , la suite z est réelle, i.e. $z^* = z$, si et seulement si $\hat{z}^* = \hat{z}$, mais, grâce au théorème ci-dessus, ceci est vérifié quand $\hat{z}(m) = (\hat{z}(-m))^* = (\hat{z}(N-m))^*$. \square

2.6.3 DFT et convolution

Une des plus importantes propriétés de la transformée de Fourier est liée à l'opération de convolution. Pour introduire cette opération on va rappeler la formule relative au produit de polynômes.

Si $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ et $Q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m = \sum_{j=0}^m b_j x^j$,

alors :

$$P(x)Q(x) = \sum_{\ell=0}^{n+m} c_\ell x^\ell, \quad \text{où} \quad c_\ell = \sum_{k=0}^{\ell} a_{\ell-k} b_k = \sum_{k=0}^{\ell} a_k b_{\ell-k}. \quad (2.39)$$

Exemple : $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$, alors :

$$P(x)Q(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)x^3 + (a_2b_2)x^4,$$

les coefficients des puissances de la variable x vérifient la formule (2.39). On observe que, dans les coefficients c_ℓ , on a une somme de produits des coefficients a_i et b_j , avec la particularité que la somme des index $i + j$ est toujours égale à ℓ et que l'index d'une variable croît tandis que l'autre décroît.

Définition 2.33. Soient $z, w \in \ell_N$ deux suites étendues par N -périodicité sur tout sous-ensemble de longueur N de \mathbb{Z} . La convolution entre z et w , écrite $z * w$, est la suite de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ avec composantes définies par :

$$\boxed{(z * w)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} z(n-k)w(k) = \sum_{k=0}^{N-1} w(n-k)z(k)}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_N.$$

Exemple : $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_4)$, $z = (1, 1, 0, 2)$, $w = (i, 0, 1, 2)$, avec la périodicité canonique : $z(n+kN) = z(n)$ et $w(n+kN) = w(n) \forall n \in \mathbb{Z}_N$ et $k \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$\begin{aligned} (z * w)(0) &= \sum_{k=0}^{4-1} z(0-k)w(k) = \sum_{k=0}^3 z(-k)w(k) \\ &= z(0)w(0) + z(-1)w(1) + z(-2)w(2) + z(-3)w(3) \\ &= z(0)w(0) + z(4-1)w(1) + z(4-2)w(2) + z(4-3)w(3) \\ &= z(0)w(0) + z(3)w(1) + z(2)w(2) + z(1)w(3) \\ &= 1 \cdot i + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 2 + i \end{aligned}$$

On obtient également : $(z * w)(1) = 2 + i$, $(z * w)(2) = 5$, $(z * w)(3) = 3 + 2i$, et donc : $(z * w) = (2 + i, 2 + i, 5, 3 + 2i)$.

Théorème 2.34. Soient $z, w \in \ell_N$ deux suites étendues par N -périodicité sur tout sous-ensemble de longueur N de \mathbb{Z} . Alors :

$$\boxed{\text{DFT}(z * w)(m) = \hat{z}(m) \cdot \hat{w}(m)} \iff \boxed{(z * w)(n) = \text{IDFT}(\hat{z} \cdot \hat{w})(n)} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z} \quad (2.40)$$

$$\boxed{\text{IDFT}(\hat{z} * \hat{w})(n) = Nz(n) \cdot w(n)} \iff \boxed{(\hat{z} * \hat{w})(m) = N \text{DFT}(z \cdot w)(m)} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z} \quad (2.41)$$

i.e. la transformée de Fourier de la convolution entre z et w est le produit ponctuel des transformées de Fourier et, inversement, la transformée de Fourier inverse de la convolution entre \hat{z} et \hat{w} est N fois le produit ponctuel de z et w . Autrement dit, on a les couples de Fourier suivants :

Représentation originale	Espace de Fourier
$z * w$	$\hat{z} \cdot \hat{w}$
$Nz \cdot w$	$\hat{z} * \hat{w}$

Démonstration. Par définition :

$$\widehat{(z * w)}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} (z * w)(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} z(n-k)w(k) \right) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}}.$$

On réécrit l'exponentielle comme ceci :

$$e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} = e^{-2\pi i \frac{m(n-k+k)}{N}} = e^{-2\pi i \frac{m(n-k)+mk}{N}} = e^{-2\pi i \frac{m(n-k)}{N}} e^{-2\pi i \frac{mk}{N}}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\widehat{(z * w)}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} z(n-k)w(k)e^{-2\pi i \frac{m(n-k)}{N}} e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} w(k)e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} z(n-k)e^{-2\pi i \frac{m(n-k)}{N}} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} w(k)e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \sum_{n=-k}^{N-k-1} z(n-k+k)e^{-2\pi i \frac{m(n-k+k)}{N}} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} w(k)e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \sum_{n=-k}^{N-k-1} z(n)e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} \\
&\stackrel{\text{(Lemme 2.24)}}{=} \sum_{k=0}^{N-1} w(k)e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} z(n)e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} \\
&= \hat{w}(m)\hat{z}(m) = \hat{z}(m)\hat{w}(m),
\end{aligned}$$

on observe qu'on a pu appliquer le Lemme 2.24 car il est valide pour n'importe quel $k \in \mathbb{Z}$.
Alors :

$$\widehat{(z * w)}(m) = \hat{z}(m)\hat{w}(m), \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

La preuve du fait que $\text{IDFT}(\hat{z} * \hat{w})(n) = z(n) \cdot w(n)$ est très similaire. Par définition :

$$\text{IDFT}(\hat{z} * \hat{w})(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} (\hat{z} * \hat{w})(m)e^{2\pi i \frac{mn}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \hat{z}(m-k)\hat{w}(k) \right) e^{2\pi i \frac{mn}{N}}.$$

On réécrit l'exponentielle comme ceci :

$$e^{2\pi i \frac{mn}{N}} = e^{2\pi i \frac{n(m-k+k)}{N}} = e^{2\pi i \frac{n(m-k)+nk}{N}} = e^{2\pi i \frac{n(m-k)}{N}} e^{2\pi i \frac{nk}{N}}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\text{IDFT}(\hat{z} * \hat{w})(n) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{z}(m-k)\hat{w}(k)e^{2\pi i \frac{n(m-k)}{N}} e^{2\pi i \frac{nk}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{w}(k)e^{2\pi i \frac{nk}{N}} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m-k)e^{2\pi i \frac{n(m-k)}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{w}(k)e^{2\pi i \frac{nk}{N}} \sum_{m=-k}^{N-k-1} \hat{z}(m-k+k)e^{2\pi i \frac{n(m-k+k)}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{w}(k)e^{2\pi i \frac{nk}{N}} \sum_{m=-k}^{N-k-1} \hat{z}(m)e^{2\pi i \frac{mn}{N}} \\
&\stackrel{\text{(Lemme 2.24)}}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{w}(k)e^{2\pi i \frac{nk}{N}} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m)e^{2\pi i \frac{mn}{N}} \\
&= N \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{w}(k)e^{2\pi i \frac{nk}{N}} \right) \cdot \left(\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m)e^{2\pi i \frac{mn}{N}} \right) \\
&= N \text{IDFT } \hat{w}(n) \cdot \text{IDFT } \hat{z}(n) = N w(n) \cdot z(n) = N z(n) \cdot w(n).
\end{aligned}$$

□

Observations :

- Comme conséquence immédiate du théorème on obtient :

$$\widehat{(z * w)}(m) = \hat{z}(m)\hat{w}(m) = \hat{w}(m)\hat{z}(m) = \widehat{(w * z)}(m) \quad \forall z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N), \forall m \in \mathbb{Z},$$

i.e. $\text{DFT}(z * w) = \text{DFT}(w * z)$, mais alors, si on applique la IDFT aux deux côtés on annule l'action de la DFT et alors on obtient que **la convolution est symétrique** :

$$(z * w)(n) = (w * z)(n) \quad \forall z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N), \forall n \in \mathbb{Z},$$

ce qui aurait très bien pu être vérifié par un calcul direct.

- Grâce à la transformée de Fourier, *on peut transformer une opération complexe comme la convolution dans le simple produit de transformées de Fourier* (que l'on peut calculer rapidement avec la FFT). Ce résultat est très utilisé dans les applications de traitement des signaux. Si on utilise la normalisation relative à la base orthonormale pour définir la DFT, alors on voit apparaître de coefficients dans la formule de la DFT de la convolution. Ces coefficients peuvent être très grands, surtout quand on considère la DFT en dimensions supérieures à 1 et/ou signaux massifs, et cela peut créer des erreurs numériques pendant les calculs. C'est surtout à cause de la simplicité de cette formule que beaucoup d'auteurs et de logiciels privilégient la définition de coefficients de Fourier que l'on a donné dans ce cours plutôt que d'autres définitions.
- Souvent, la convolution est faite entre un signal z et un autre signal w qui est non nul seulement sur un support de taille T . Selon la valeur de T , il est important de savoir s'il vaut mieux effectuer la convolution directement ou en passant par la FFT. La complexité de l'opération de convolution directe est $\mathcal{O}(NT)$, par contre, si on utilise la FFT, la complexité est $\mathcal{O}(N \log N)$. Par conséquent, il est avantageux de transformer la convolution en un produit ponctuel avec la FFT dès que $T > \log(N)$. Pour donner un exemple concret, si $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, avec $N = 1000$, alors $\log(N) \simeq 7$ et donc il est conseillé de faire la convolution $z * w$ dans le domaine de Fourier dès que le support de w est supérieur à 7.

Si on fixe un vecteur dans la convolution, on peut définir l'endomorphisme de ℓ_N suivant :

Définition 2.35. *Pour toute suite $w \in \ell_N$ fixée, on appelle **opérateur de convolution** avec w la transformation linéaire suivante :*

$$\begin{aligned} T_w : \ell_N &\longrightarrow \ell_N \\ z &\longmapsto T_w(z) = z * w. \end{aligned}$$

Comme pour le cas de l'opérateur de translation, on peut donner une représentation diagonale de l'opérateur de convolution. Pour cela, en utilisant la formule (2.40), on écrit :

$$(\text{DFT} \circ T_w)z = \text{DFT}(z * w) = \hat{z} \cdot \hat{w} = M_{\hat{w}} \hat{z} = (M_{\hat{w}} \circ \text{DFT})z, \quad z \in \ell_N.$$

Ceci étant vrai pour tout $z \in \ell_N$, il vient

$$\text{DFT} \circ T_w = M_{\hat{w}} \circ \text{DFT}$$

Et en composant avec IDFT à droite de l'expression précédente, on obtient :

$$\text{DFT} \circ T_w \circ \text{IDFT} = M_{\hat{w}}.$$

On rappelle que, dans la base canonique, W_N et W_N^{-1} sont les matrices représentatives de la DFT et IDFT respectivement, que l'opérateur de multiplication $M_{\hat{w}}$ à pour matrice représentative la matrice diagonale $D_{\hat{w}} = \text{diag}(\hat{w}(0), \dots, \hat{w}(N-1))$ et, en notant A_w la matrice représentative de l'opérateur T_w , l'expression matricielle de cette dernière égalité devient alors

$$W_N A_w W_N^{-1} = D_{\hat{w}},$$

ce qui montre que l'action de l'opérateur de convolution est diagonalisée dans la base de Fourier.

Les cas des opérateurs de translation et de convolution ne sont pas spéciaux, en fait il existe une catégorie spécifique d'opérateurs dont l'action est diagonale dans la base de Fourier. Ces opérateurs s'appellent *stationnaires* et ils sont examinés en détail dans la section suivante.

Le fait d'avoir déjà examiné les opérateurs de convolution et les multiplicateurs de Fourier nous permettra de montrer un résultat très important : l'opérateur de convolution et le multiplicateur de Fourier sont les prototypes d'opérateurs stationnaires, dans le sens où l'action de tout opérateur stationnaire peut être transformée en une convolution ou une multiplication de Fourier.

2.7 La DFT et les opérateurs stationnaires

La transformée de Fourier a une relation particulière avec une classe d'opérateurs dits « stationnaires ». En fait, elle permet de diagonaliser ces opérateurs et de montrer qu'ils sont équivalents à des opérateurs de convolution et, aussi, à des multiplicateurs de Fourier.

Après avoir défini précisément les opérateurs stationnaires, pour démontrer les résultats mentionnés ci-dessus, on devra aussi introduire une catégorie de matrices, dites circulantes, qui représentent les opérateurs stationnaires dans la base canonique de ℓ_N et la convolution.

Pour motiver la définition d'opérateur stationnaire, imaginons de devoir transformer un signal audio z avec un appareil T . Si on transmet le signal z avec un retard Δt et le seul effet sur T est de retarder également la sortie du signal transformé de la quantité Δt , alors on dit que l'appareil T est stationnaire.

Autrement dit, si l'action de T sur le signal A est indépendante de l'instant de temps dans lequel on l'applique à A , alors T est stationnaire.

Si R_k est l'opérateur de translation de la quantité $k \in \mathbb{Z}$, alors la stationnarité de T est traduite par la relation suivante :

$$T(R_k z) = R_k(Tz), \quad \forall z \in \ell_N.$$

En fait, le côté de gauche représente l'action de l'opérateur T sur le signal z décalé de la quantité k , tandis que le côté de droite représente le décalage de l'action de l'opérateur T sur le signal original z . Le diagramme commutatif suivant résume ce que l'on vient de discuter.

$$\begin{array}{ccc} \ell_N & \xrightarrow{R_k} & \ell_N \\ T \downarrow & & \downarrow T \\ \ell_N & \xrightarrow{R_k} & \ell_N \end{array}$$

Cette considération donne la motivation pour la définition suivante.

Définition 2.36. Un opérateur en $T : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ est dit **stationnaire** (ou invariant par translation) si

$$T(R_k z) = R_k(Tz), \quad \forall z \in \ell_N, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (2.42)$$

i.e. T est stationnaire s'il commute avec tout opérateur de translation R_k :

$$\boxed{T \circ R_k = R_k \circ T}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (2.43)$$

Remarque 2.37. Pour fixer les idées, notons qu'une conséquence des résultats de la fin de ce chapitre sera de démontrer qu'un opérateur linéaire T sur $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ est stationnaire si et seulement si T a cette expression :

$$\boxed{(Tz)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z(n-k)} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k R_k z(n), \quad \forall n \in \{0, \dots, N-1\},$$

où $a_k \in \mathbb{C}$. Comme $R_k = (R_1)^k$, i.e. R_k est obtenu via k compositions de R_1 , T est stationnaire si et seulement si il est un polynôme en R_1 : $T = \sum_{k=0}^{N-1} a_k (R_1)^k$.

La réciproque est moins évidente, mais il est facile de montrer que T ainsi défini est stationnaire grâce à la linéarité de T et R_k . En fait, $\forall n \in \{0, \dots, N-1\}$:

$$\begin{aligned} (TR_m z)(n) &= T(R_m z(n)) = T(z(n-m)) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z(n-k-m) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k R_m z(n-k) \\ &\stackrel{\text{(linéarité de } R_m)}{=} R_m \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k z(n-k) \right) = (R_m Tz)(n), \end{aligned}$$

donc : $T \circ R_m = R_m \circ T \quad \forall m \in \mathbb{Z}$.

Exemple et non-exemple : $(Tz)(n) = 3z(n-2) + iz(n) - (2+i)z(n+1)$ est un opérateur stationnaire de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Pour avoir un opérateur non stationnaire, on doit définir une réponse de T différente pour au moins une composante, comme par exemple : $T : \ell^2(\mathbb{Z}_4) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_4)$,

$$Tz = \left(\underbrace{2z(0) - z(1)}_{Tz(0)}, \underbrace{iz(1) + 2z(2)}_{Tz(1)}, \underbrace{z(1)}_{Tz(2)}, \underbrace{0}_{Tz(3)} \right).$$

On considère, par exemple, $z = (1, 0, -2, i)$ et on va vérifier que $T(R_1 z) \neq R_1(Tz)$.

$$T(1, 0, -2, i) = (2 \cdot 1 - 0, i \cdot 0 + 2 \cdot (-2), 0, 0) = (2, -4, 0, 0),$$

alors $R_1 T(1, 0, -2, i) = (0, 2, -4, 0)$. Par contre, $R_1(1, 0, -2, i) = (i, 1, 0, -2) = \tilde{z} = (\tilde{z}(0), \tilde{z}(1), \tilde{z}(2), \tilde{z}(3))$, alors

$$T(R_1(1, 0, -2, i)) = T(\tilde{z}) = (2\tilde{z}(0) - \tilde{z}(1), i\tilde{z}(1) + 2\tilde{z}(2), \tilde{z}(1), 0) = (2i - 1, i \cdot 1 + 2 \cdot 0, 1, 0) = (2i - 1, i, 1, 0).$$

En définitive, on a :

$$R_1 T(1, 0, -2, i) = (0, 2, -4, 0) \neq (2i - 1, i, 1, 0) = T R_1(1, 0, -2, i),$$

alors, il existe au moins un $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_4)$ pour lequel T ne commute pas avec un opérateur de translation, et donc T ne peut pas être stationnaire.

2.7.1 La DFT et la diagonalisation des opérateurs stationnaires

On pourrait résumer dans un seul théorème les plus importantes propriétés de la DFT en relation aux opérateurs stationnaires, mais on préfère souligner le fait que la transformée de Fourier diagonalise les opérateurs stationnaires dans un énoncé séparé.

Théorème 2.38. *Soit $T \in \text{End}(\ell_N)$ un opérateur linéaire stationnaire. Alors, T est diagonalisable, en fait chaque élément de la base orthogonale de Fourier F_m de ℓ_N est un vecteur propre de T .*

Démonstration. Pour chaque $m \in \{0, \dots, N-1\}$ fixé, on considère l'élément m de la base orthogonale de Fourier : $F_m(n) = \frac{1}{N} e^{2\pi i \frac{mn}{N}}$.

Comme T est un endomorphisme, $TF_m \in \ell_N$, et donc on peut décomposer TF_m sur la base (F_0, \dots, F_{N-1}) elle-même :

$$(TF_m)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k F_k(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{2\pi i \frac{kn}{N}}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_N. \quad (2.44)$$

On considère maintenant l'action de l'opérateur de translation R_1 sur F_m :

$$\begin{aligned} R_1 F_m(n) &= F_m(n-1) = \frac{1}{N} e^{2\pi i \frac{m(n-1)}{N}} = e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \cdot \frac{1}{N} e^{2\pi i \frac{mn}{N}} \\ &= e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \cdot F_m(n). \end{aligned}$$

Si on applique T à $R_1 F_m$ on obtient :

$$\begin{aligned} TR_1 F_m(n) &= T \left(e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \cdot F_m(n) \right) \\ &= \underset{\text{Linéarité de } T}{e^{-2\pi i \frac{m}{N}} (TF_m)(n)} \\ &= \underset{\text{éq. (2.44)}}{e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} a_k F_k(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-2\pi i \frac{m}{N}} F_k(n). \end{aligned}$$

Maintenant on permute l'ordre de composition entre R_1 et T :

$$\begin{aligned} R_1 T F_m(n) &= T F_m(n-1) \\ &= \underset{\text{éq. (2.44)}}{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{2\pi i \frac{k(n-1)}{N}}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-2\pi i \frac{k}{N}} \cdot e^{2\pi i \frac{kn}{N}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-2\pi i \frac{k}{N}} F_k(n). \end{aligned}$$

Mais T est stationnaire, donc $TR_1F_m = R_1TF_m$, i.e.

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-2\pi i \frac{m}{N}} F_k(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-2\pi i \frac{k}{N}} F_k(n),$$

mais grâce au théorème d'unicité de la décomposition sur une base :

$$a_k e^{-2\pi i \frac{m}{N}} = a_k e^{-2\pi i \frac{k}{N}}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_N, \quad (m \text{ est fixé}). \quad (2.45)$$

On analyse cette égalité : si $k = m$, alors l'éq. (2.45) devient une identité et on a rien à discuter. Pour examiner le cas $k \neq m$ il faut rappeler que $m, k \in \{0, \dots, N-1\}$, donc le cos et le sin des exponentielles complexes prennent leurs valeurs dans un période seulement, car la période suivante commence quand $m, k = N$! Donc :

$$k \neq m \implies e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \neq e^{-2\pi i \frac{k}{N}},$$

et l'éq. (2.45) peut être vérifiée si et seulement si $a_k = 0 \quad \forall k \neq m$.

En conséquence, l'éq. (2.44) devient

$$TF_m(n) = a_m F_m(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}_N,$$

c'est à dire, F_m est un vecteur propre de T avec une valeur propre a_m qui est donnée par l' m -ième coefficient de la décomposition de TF_m sur la base orthogonale de Fourier. Bien sûr a_m dépend de T (dans le théorème 2.40 on verra comment expliciter a_m avec la DFT).

On rappelle que l'on a fixé un index m arbitraire, donc tout élément de la base orthogonale de Fourier est un vecteur propre de T , et, par conséquent, ℓ_N a une base de vecteurs propres de T . Par définition, T est diagonalisable. \square

On peut donner une interprétation matricielle du théorème que l'on vient de voir : en fait, on sait que l'action de la DFT est représentée par la matrice W_N définie dans l'éq. (2.17) et que W_N est la matrice de passage de la base canonique B de ℓ_N à la base de Fourier F de ℓ_N , avec inverse $W_N^{-1} = \frac{1}{N} W_N^*$, qui représente la matrice de passage de base de F à B .

Si on applique le théorème 1.29 à notre cas⁴, on obtient que, si A est la matrice associée à T par rapport à la base canonique de ℓ_N et D est la matrice diagonale des valeurs propres de A , alors :

$$\boxed{D = W_N A W_N^{-1}}, \quad \boxed{A = W_N^{-1} D W_N}. \quad (2.46)$$

On peut vérifier directement ces équations. On rappelle qu'avec la notation $[w]_F$ on décrit un vecteur quelconque $w \in \ell_N$ avec ses composantes par rapport à la base de Fourier F , alors :

$$W_N A z = [Az]_F \underset{(F \text{ diagonalise } A)}{=} D[z]_F = D W_N z, \quad \forall z \in \ell_N,$$

donc $W_N A = D W_N$, si et seulement si : $W_N A W_N^{-1} = D W_N W_N^{-1} = D$.

4. Observer que le rôle de la matrice P dans le théorème 1.29 est joué, dans notre cas, par la matrice W_N^{-1} , car c'est elle qui permet de passer de la base de vecteurs propres de A à la base canonique.

2.7.2 Matrices circulantes

Pour pouvoir énoncer et démontrer le théorème fondamental relatif au lien entre transformée de Fourier et opérateurs stationnaires, on doit introduire un dernier objet : les matrices circulantes.

On commence par généraliser la périodicité des suites de ℓ_N aux matrices : donnée une matrice $A = (a_{mn})_{m,n=0}^{N-1}$, on dit que A est une **matrice N -périodique** si :

$$a_{m+kN,n} = a_{m,n} \quad \text{et} \quad a_{m,n+kN} = a_{m,n}, \quad \forall m, n, k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple : $a_{0,2} = a_{N,2} = a_{N,N+2}$.

Définition 2.39. Soit $A = (a_{mn})_{m,n=0}^{N-1}$ une matrice $N \times N$ périodique. A est dite **circulante** si :

$$\boxed{a_{m+1,n+1} = a_{m,n}}, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z},$$

si on répète k fois la translation, on peut réécrire la définition comme ceci :

$$a_{m+k,n+k} = a_{m,n}, \quad \forall m, n, k \in \mathbb{Z},$$

on observe que, comme $k \in \mathbb{Z}$, on peut définir une matrice périodique circulante aussi avec la propriété : $a_{m-k,n-k} = a_{m,n}$, $k \in \mathbb{Z}$.

L'interprétation de la définition est la suivante : la ligne (colonne) $m+1$ ($n+1$) est obtenue de la ligne (colonne) m (n) par translation à droite (en bas) d'une position, comme on peut le voir dans la matrice suivante.

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{N-1} \\ a_{N-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{N-2} \\ a_{N-2} & a_{N-1} & a_0 & \dots & a_{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Exemple de matrice circulante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2+i & -1 & 4i \\ 4i & 3 & 2+i & -1 \\ -1 & 4i & 3 & 2+i \\ 2+i & -1 & 4i & 3 \end{pmatrix}.$$

Exemple de matrice non-circulante :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & i & 3 \\ 3 & 2 & i \\ i & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour être circulante, la 3-ième ligne devrait être $(i, 3, 2)$.

2.7.3 La caractérisation exhaustive des opérateurs stationnaires

Le théorème suivant, le plus important du chapitre, permettra d'expliciter les valeurs propres d'un opérateur stationnaire T d'une façon très simple et aussi de caractériser T comme opérateur de convolution, dans la représentation originale de z , et comme un multiplicateur, dans la représentation fréquentielle.

Théorème 2.40. *Soit $T : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow \ell_N$ un endomorphisme. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1) T est stationnaire ;
- (2) La matrice A qui représente T dans la base canonique de ℓ_N est circulante ;
- (3) T est un opérateur de convolution ;
- (4) T est un multiplicateur de Fourier ;
- (5) La matrice D qui représente T dans la base orthogonale de Fourier F est diagonale.

On note qu'on a déjà démontré l'implication (1) \Rightarrow (5). On démontre le théorème avec la stratégie suivante :

$$\boxed{(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)} \quad \text{et} \quad \boxed{(3) \Leftrightarrow (4)} \quad \text{et} \quad \boxed{(4) \Leftrightarrow (5)}$$

La preuve du théorème a une importance fondamentale, car elle donne une technique explicite pour trouver les valeurs propres de T et pour construire l'opérateur de convolution et le multiplicateur de Fourier qui représentent T .

Démonstration. $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$: soit A la matrice associée à T via la base canonique⁵ $(e_n)_{n=0}^{N-1}$ de ℓ_N :

$$A = \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N-1,0} & a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,N-1} \end{pmatrix}.$$

Par définition de matrice associée on a : $a_{m,n} = (Te_n)(m)$, i.e. la n -ième colonne de A est le vecteur Te_n . En utilisant le fait que T est stationnaire, on doit démontrer que :

$$a_{m+1,n+1} = a_{m,n} \iff (Te_{n+1})(m+1) = (Te_n)(m), \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}_N.$$

On observe que :

$$(R_1 e_n)(m) = e_n(m-1) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m-1 \\ 0 & \text{si } n \neq m-1 \end{cases} \iff \begin{cases} m = n+1 \\ m \neq n+1 \end{cases} = e_{n+1}(m) \quad \forall m \in \mathbb{Z}_N,$$

donc $e_{n+1} = R_1 e_n$ et alors :

$$a_{m+1,n+1} = (TR_1 e_n)(m+1) \underset{(T \text{ stationnaire})}{=} R_1 (Te_n)(m+1) = (Te_n)(m+1-1) = (Te_n)(m) = a_{m,n}.$$

5. On rappelle que $e_n(m) = \delta_{n,m}$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}_N$.

Comme $a_{m+1,n+1} = a_{m,n} \forall m, n \in \mathbb{Z}_N$, alors A est circulante et l'implication $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ est démontrée.

$\boxed{(2) \Rightarrow (3)}$: soit A une matrice périodique circulante, i.e. $a_{m,n} = a_{m-k,n-k} \forall n, m, k \in \mathbb{Z}$, on doit démontrer qu'il existe $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ tel que $Az = z * w = T_w(z) \forall z \in \ell_N$. On va prouver que la suite w que l'on cherche est la première colonne de A , i.e. :

$$\boxed{h = Te_0} = \begin{pmatrix} a_{0,0} \\ \vdots \\ a_{N-1,0} \end{pmatrix}, \quad h(m) = a_{m,0}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}_N.$$

On observe que $h(m-n) = a_{m-n,0} = a_{m-n,n-n} \stackrel{(A \text{ circulante})}{=} a_{m,n}$, et alors, par définition de produit matrice par vecteur, on a :

$$(Az)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} a_{m,n}z(n) = \sum_{n=0}^{N-1} h(m-n)z(n) = (h * z)(m)$$

et l'implication $\boxed{(2) \Rightarrow (3)}$ est démontrée.

$\boxed{(3) \Rightarrow (1)}$: il faut prouver qu'un opérateur de convolution T_w est stationnaire, i.e. :

$$(T_w \circ R_k)(z) = (R_k \circ T_w)(z), \quad \forall z \in \ell_N, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

On calcule d'abord le côté gauche de l'équation :

$$(T_w R_k z)(m) = (w * R_k z)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} w(m-n)R_k z(n) = \sum_{n=0}^{N-1} w(m-n)z(n-k).$$

On va faire le changement d'index suivant : $\ell = n - k \Leftrightarrow n = k + \ell$, la variabilité de ℓ est :

$$\begin{cases} n = 0 \implies \ell = -k \\ \vdots \\ n = N - 1 \implies \ell = N - 1 - k, \end{cases}$$

alors :

$$\begin{aligned} (T_w R_k z)(m) &= \sum_{\ell=-k}^{N-1-k} w(m-k-\ell)z(\ell) \stackrel{\text{Lemme 2.24}}{=} \sum_{\ell=0}^{N-1} w((m-k)-\ell)z(\ell) \\ &= (z * w)(m-k) = R_k(z * w)(m) = (R_k T_w z)(m), \end{aligned}$$

et donc l'implication $\boxed{(3) \Rightarrow (1)}$ est démontrée.

$\boxed{(3) \iff (4)}$: on doit démontrer qu'un opérateur linéaire $T : \ell_N \rightarrow \ell_N$ est un opérateur de convolution si et seulement si T est un multiplicateur de Fourier.

Si on fixe un élément $w \in \ell_N$, quelconque, on a :

$$\begin{aligned} T_w(z) &= z * w = \text{IDFT}(\text{DFT}(z * w)) \stackrel{(\text{éq. 2.40})}{=} \text{IDFT}(\hat{z} \cdot \hat{w}) \\ &= (\text{IDFT} \circ M_{\hat{w}} \circ \text{DFT})z = T_{(\hat{w})}z, \quad \forall w, z \in \ell_N, \end{aligned}$$

où $M_{\hat{w}}$ est l'opérateur de multiplication par la suite \hat{w} . Cela montre que **l'opérateur de convolution avec w peut être interprété comme le multiplicateur de Fourier par \hat{w} et vice-versa**. Donc la double implication $\boxed{(3) \iff (4)}$ est démontrée.

Avant de passer à la dernière étape de la preuve, on résume ce que l'on a vu jusqu'à ce moment : un opérateur stationnaire $T : \ell_N \rightarrow \ell_N$ est représenté par une matrice circulante A relativement à la base canonique (e_0, \dots, e_{N-1}) de ℓ_N . La matrice A , à la fois, peut être représentée par l'opérateur de convolution T_h avec $h = Te_0$, la première colonne de A ou, comme l'on vient de le voir, par le multiplicateur de Fourier $T_{(\hat{h})}$, où \hat{h} est la suite des coefficients de Fourier de h .

$\boxed{(4) \iff (5)}$: On doit prouver que T est un multiplicateur de Fourier $T_{(w)}$, si et seulement si la matrice associée à T par rapport à la base orthogonale de Fourier F est diagonale.

On commence par l'implication directe : soit $T = T_{(w)}$ un multiplicateur de Fourier, on doit démontrer que $T_{(w)}$ est diagonale dans la base F . Par définition, $T_{(w)}z = (\text{IDFT} \circ M_w \circ \text{DFT})(z)$, donc, si on applique la DFT on obtient : $\widehat{T_{(w)}z} = (\text{DFT} \circ \text{IDFT} \circ M_w \circ \text{DFT})(z) = M_w \hat{z}$. Alors, les composantes de $T_{(w)}z$ dans la base F sont :

$$[T_{(w)}z]_F = \begin{pmatrix} w(0)\hat{z}(0) \\ \vdots \\ w(N-1)\hat{z}(N-1) \end{pmatrix}.$$

Si on définit la matrice diagonale : $D = \text{diag}(w(n))$, i.e. $d_{0,0} = w(0), \dots, d_{N-1,N-1} = w(N-1)$, on peut réécrire l'équation précédente comme ceci :

$$[T_{(w)}z]_F = \begin{pmatrix} d_{0,0}\hat{z}(0) \\ \vdots \\ d_{N-1,N-1}\hat{z}(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{0,0} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{N-1,N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{z}(0) \\ \vdots \\ \hat{z}(N-1) \end{pmatrix} = D\hat{z} = D[z]_F.$$

Alors, dans la base de Fourier F , l'action de $T = T_{(w)}$ peut être représentée avec une matrice diagonale et l'implication $(4) \implies (5)$ est démontrée.

L'implication $(5) \implies (4)$ est très facile à démontrer : en fait, si $D = (d_{m,n})_{m,n=0}^{N-1}$ est la matrice diagonale qui représente l'opérateur T dans la base de Fourier F , alors ça suffit de définir la suite $w(n) = d_{n,n}, \forall n = 0, \dots, N-1$ et $T_{(w)}$ comme le multiplicateur de Fourier associé à w pour avoir :

$$[Tz]_F = D[z]_F = [T_{(w)}z]_F,$$

alors $T = T_{(w)}$ et l'implication $(5) \implies (4)$ est démontrée et, par conséquent, aussi la double implication $\boxed{(4) \iff (5)}$. Toutes les implications ont été démontrées et donc le théorème est prouvé. \square

Le théorème que l'on vient de démontrer donne une technique standard pour l'étude des opérateurs stationnaires T sur ℓ_N . Si on définit la suite :

$$\delta \in \ell_N, \quad \delta(n) = e_0(n) = \delta_{0,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_N,$$

dite **impulsion unitaire**, alors l'opérateur T est complètement déterminé par son action sur δ , $h = T\delta$, qu'on appelle **réponse impulsionnelle**. \hat{h} , la DFT de la réponse impulsionnelle, est dite **fonction de transfert**.

En fait, grâce aux propriétés démontrées dans les théorèmes 2.38 et 2.40, on peut résumer l'analyse des opérateurs stationnaires comme ceci.

Analyse des opérateurs stationnaires sur ℓ_N :

- T , opérateur stationnaire de ℓ_N ;
- A , matrice **circulante** associée à T par rapport à la *base canonique* de ℓ_N ;
- h , **réponse impulsionnelle de T** :

$$h = T\delta = \text{première colonne de } A;$$

- T_h , **opérateur de convolution avec h** :

$$Tz = T_h z = h * z = z * h;$$

- $T_{(\hat{h})}$, **multiplicateur de Fourier par \hat{h} , la fonction de transfert** :

$$Tz = T_{(\hat{h})} z = \text{IDFT}(\hat{h} \cdot \hat{z});$$

- Donné $h = T\delta$, on a le couple de Fourier suivant :

Représentation originale	Espace de Fourier
$h * z$	$\hat{h} \cdot \hat{z}$

- D , matrice diagonale qui représente T dans la base orthogonale F de Fourier de ℓ_N :

$$D = \frac{1}{N} W_N A W_N^* = \text{diag}(\hat{h}(0), \dots, \hat{h}(N-1)).$$

- Les valeurs propres de T sont les composantes de la fonction de transfert, i.e. les coefficients de Fourier de la réponse impulsionnelle, i.e.

$$\text{Valeurs propres de } T : \hat{h}(0), \dots, \hat{h}(N-1).$$

Le code Matlab pour générer les matrices de Vandermonde-Fourier W_4 et W_4^{-1} et pour diagonaliser la matrice circulante A associée à un opérateur stationnaire dans la base canonique est le suivante.

```

1 W4=fft(eye(4)); % eye(4) est la matrice identite'
2 W4i=inv(fft(eye(4))); % matrice inverse
3 A=gallery('circul',[a_00 a_01 a_02 a_03]); % remplacer a_00 etc. par la ...
   ligne 0 de A
4 D=W4*A*W4i % matrice diagonale dans la base orthogonale de Fourier

```

2.7.4 Filtres passe-haut, passe-bas, passe-bande

Si on applique la DFT aux deux côtés de la formule $Tz = T_{(\hat{h})}z = \text{IDFT}(\hat{h} \cdot \hat{z})$ on obtient :

$$\text{DFT}(Tz) = T_{(\hat{h})}z = \text{DFT} \circ \text{IDFT}(\hat{h} \cdot \hat{z}) = \hat{h} \cdot \hat{z},$$

i.e.

$$\boxed{\widehat{Tz}(m) = \hat{h}(m) \cdot \hat{z}(m)}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}_N,$$

donc les coefficients de Fourier de Tz , la suite transformée par l'opérateur T , sont donnés par le produit des coefficients de Fourier de la suite originale z fois les coefficients de Fourier de la réponse impulsionnelle h .

Par conséquent, le **spectre de la suite transformée** Tz est :

$$\left\{ \left| \widehat{Tz}(m) \right| = |\hat{h}(m)| \cdot |\hat{z}(m)|, m \in \mathbb{Z}_N \right\}.$$

Cela aide beaucoup à *comprendre l'action des filtres stationnaires T sur le contenu fréquentiel d'un signal z* :

- Si $\hat{h}(0) = 0$, Tz a **moyenne nulle**, car $\left| \widehat{Tz}(0) \right| = 0 \cdot |\hat{z}(0)| = 0$ et on sait que $\left| \widehat{Tz}(0) \right|$ est proportionnelle à la moyenne de Tz ;
- Si $|\hat{h}(0)| = 1$, alors T **conserve la moyenne** de z , i.e. $\langle Tz \rangle = \langle z \rangle$;
- Si $|\hat{h}(m)| > 1$ pour $m \simeq 0$ et $m \simeq N - 1$ et $|\hat{h}(m)| \in [0, 1[$ pour $m \simeq N/2$, alors T augmente les basses fréquences et réduit les hautes fréquences (filtre **passe-bas**) ;
- Si $|\hat{h}(m)| > 1$ pour $m \simeq N/2$ et $|\hat{h}(m)| \in [0, 1[$ pour $m \simeq 0$ et $m \simeq N - 1$, alors T augmente les hautes fréquences et réduit les basses fréquences (filtre **passe-haut**) ;
- Si $|\hat{h}(m)| > 1$ pour des valeurs intermédiaires de m , alors T augmente les fréquences moyennes (filtre **passe-bande**) ;
- Si $|\hat{h}(m)| > 1$ pour tout valeur de m , alors T est un amplificateur de fréquence tout court.

2.7.5 Analyse fréquentielle des opérateurs de dérivation (discrète) première et seconde

Dans cette section on va analyser deux opérateurs stationnaires qui représentent la version discrète de la dérivée première et seconde. La comparaison de leurs valeurs propres montrera pourquoi l'opérateur de dérivation seconde est plus efficace pour amplifier les hautes fréquences dans les signaux numériques.

Définition 2.41. *Donné une suite $z \in \ell_N$ étendue par périodicité à \mathbb{Z} , on définit :*

$$T_1 z(n) = z(n+1) - z(n) \quad \text{Dérivée première discrète}$$

$$T_2 z(n) = z(n+1) - 2z(n) + z(n-1) \quad \text{Dérivée seconde discrète}$$

La *dérivée première discrète* est simplement la *différence en avant* de z , divisé par la différence des valeurs de n , mais comme $(n+1) - n = 1$ on peut éviter d'écrire le dénominateur.

La *dérivée seconde discrète* est la *différence en arrière de la dérivée première* de z , divisé par la différence des valeurs de n , qui est encore une 1, donc on ne l'écrit pas. Explicitement : $T_2 z(n) = T_1 z(n) - T_1 z(n-1) = z(n+1) - z(n) - [z(n) - z(n-1)] = z(n+1) - 2z(n) + z(n-1)$.

On commence par l'analyse de T_1 . Pour calculer sa réponse impulsionnelle on doit appliquer T_1 à l'impulsion unitaire $\delta = e_0 = \delta_{0,n}$, l'élément de position 0 de la base canonique de ℓ_N :

$$h = T_1 \delta = \begin{pmatrix} e_0(1) - \boxed{e_0(0)} & \longleftarrow n = 0 \\ e_0(2) - e_0(1) & \longleftarrow n = 1 \\ \vdots & \\ \boxed{e_0(N-1+1)} - e_0(N-1) & \longleftarrow n = N-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où on a utilisé le fait que $e_0(0) = e_0(N) = 1$. La matrice qui représente T_1 dans la base canonique de ℓ_N est :

$$A_{T_1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On calcule maintenant la DFT de h , pour tout $m \in \mathbb{Z}_N$ ça vaut :

$$\begin{aligned} \hat{h}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} = -1 \cdot e^{-2\pi i \frac{m0}{N}} + 0 + \dots + 1 \cdot e^{-2\pi i \frac{m(N-1)}{N}} \\ &= -1 + e^{2\pi i \frac{m}{N}} e^{-2\pi i \frac{mN}{N}} = e^{2\pi i \frac{m}{N}} - 1. \end{aligned}$$

donc les valeurs propres de T_1 sont $\{\hat{h}(m) = e^{2\pi i \frac{m}{N}} - 1, m = 0, 1, \dots, N-1\}$ et sa représentation diagonale est :

$$D = \text{diag} \left(0, e^{2\pi i \frac{1}{N}} - 1, e^{2\pi i \frac{2}{N}} - 1, \dots, e^{2\pi i \frac{(N-1)}{N}} - 1 \right).$$

Allons maintenant à interpréter l'action fréquentielle de T_1 en calculant son spectre, i.e. en explicitant les modules des valeurs propres $(\hat{h}(m))_{m \in \mathbb{Z}_N}$. Le calcul sera plus simple si on considère les modules carrés et on calcule seulement à la fin la racine carrée :

$$\begin{aligned} |\hat{h}(m)|^2 &= \left| \cos \left(2\pi \frac{m}{N} \right) + i \sin \left(2\pi \frac{m}{N} \right) - 1 \right|^2 = \left(\cos \left(2\pi \frac{m}{N} \right) - 1 \right)^2 + \sin^2 \left(2\pi \frac{m}{N} \right) \\ &= \cos^2 \left(2\pi \frac{m}{N} \right) + \sin^2 \left(2\pi \frac{m}{N} \right) + 1 - 2 \cos \left(2\pi \frac{m}{N} \right) = 2 - 2 \cos \left(2\pi \frac{m}{N} \right) \\ &= 2 \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{m}{N} \right) \right), \end{aligned}$$

mais grâce à l'identité trigonométrique $1 - \cos(2\alpha) = 2 \sin^2(\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, en interprétant $\alpha = \pi \frac{m}{N}$ on peut écrire :

$$|\hat{h}(m)|^2 = 2 \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{m}{N} \right) \right) = 4 \sin^2 \left(\pi \frac{m}{N} \right),$$

alors, $|\hat{h}(m)| = 2 \left| \sin \left(\pi \frac{m}{N} \right) \right|$, mais $m \in \mathbb{Z}_N$, $\frac{m}{N} < 1$, donc le sinus est toujours non négatif et on peut éliminer la valeur absolue. En résumé :

$$\boxed{\left\{ |\hat{h}(m)| = 2 \sin \left(\pi \frac{m}{N} \right), m \in \mathbb{Z}_N \right\}} \quad \text{Spectre de l'opérateur dérivée première discrète.}$$

En particulier :

- $|\hat{h}(0)| = 0$: par conséquent, le signal filtré $T_1 z$ a moyenne nulle ;
- $|\hat{h}(\frac{N}{2})| = 2$;
- $|\hat{h}(m)| < 2 \forall m \neq \frac{N}{2}$;
- $|\hat{h}(m)| \rightarrow 0$ si $m \rightarrow 0$ ou $m \rightarrow N - 1$;
- L'action de l'opérateur est symétrique par rapport à $\frac{N}{2}$.

Comme $m = N/2$ représente la plus haute fréquence du signal et $m = 0$ et $m = N - 1$ représentent les plus basses fréquences, on déduit que T_1 réduit les basses fréquences de z et il augmente jusqu'à 2 fois les hautes fréquences. Donc, **l'opérateur dérivée première discrète est un filtre passe-haut.**

Maintenant on passe à l'analyse de T_2 . Sa réponse impulsionnelle est donné par le vecteur :

$$h = T\delta = \begin{pmatrix} e_0(1) - 2\boxed{e_0(0)} + e_0(-1) \\ e_0(2) - 2e_0(1) + \boxed{e_0(0)} \\ \vdots \\ \boxed{e_0(N)} - 2e_0(N-1) + e_0(N-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice associée à T_2 dans la base canonique de ℓ_N est :

$$A_{T_2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On calcule maintenant la DFT de h :

$$\begin{aligned} \hat{h}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} = -2 \cdot e^{-2\pi i \frac{m \cdot 0}{N}} + 1 \cdot e^{-2\pi i \frac{m}{N}} + 0 + \dots + 1 \cdot e^{-2\pi i \frac{m(N-1)}{N}} \\ &= -2 + e^{-2\pi i \frac{m}{N}} + e^{-2\pi i m} e^{2\pi i \frac{m}{N}} = -2 + e^{2\pi i \frac{m}{N}} + e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \\ &= -2 + 2 \cdot \frac{e^{2\pi i \frac{m}{N}} + e^{-2\pi i \frac{m}{N}}}{2} = -2 + 2 \cos \left(2\pi \frac{m}{N} \right). \end{aligned}$$

On veut comparer ces valeurs de $\hat{h}(m)$ avec ceux de l'opérateur dérivée première, pour cela il est utile l'identité trigonométrique utilisée avant, mais explicité en fonction du sinus carré : $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Si on réécrit $\hat{h}(m) = -4 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left(2\pi \frac{m}{N} \right) \right]$ et on interprète $\alpha = \pi \frac{m}{N}$, on obtient $\hat{h}(m) = -4 \sin^2 \left(\pi \frac{m}{N} \right)$. Donc les valeurs propres de T_2 sont $\{\hat{h}(m) = -4 \sin^2 \left(\pi \frac{m}{N} \right), m = 0, 1, \dots, N-1\}$ et sa représentation diagonale est :

$$D = \text{diag} \left(0, -4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{N} \right), -4 \sin^2 \left(\frac{2\pi}{N} \right), \dots, -4 \sin^2 \left(\frac{(N-1)\pi}{N} \right) \right).$$

Le spectre de T_2 est donné par

$$\boxed{\left\{ |\hat{h}(m)| = 4 \sin^2 \left(\pi \frac{m}{N} \right), m \in \mathbb{Z}_N \right\}} \quad \text{Spectre de l'opérateur dérivée seconde discrète.}$$

On voit que les valeurs du spectre de l'opérateur de dérivée seconde sont les carrés de ceux de l'opérateur de dérivée première. En conséquence :

- $|\hat{h}(0)| = 0$: donc, comme pour la première dérivée, le signal filtré $T_2 z$ a moyenne nulle ;
- $|\hat{h}(\frac{N}{2})| = 4$;
- $|\hat{h}(m)| < 4 \forall m \neq \frac{N}{2}$;
- $|\hat{h}(m)| \rightarrow 0$ si $m \rightarrow 0$ ou $m \rightarrow N-1$ et la convergence à zéro est plus rapide que pour l'opérateur de dérivée première, car dans ce cas le sinus est élevé au carré, comme on le voit dans la figure 2.12.
- L'action de l'opérateur est symétrique par rapport à $\frac{N}{2}$.

Donc, aussi **l'opérateur dérivée seconde discrète est un filtre passe-haut**, avec une action d'amplification des hautes fréquences et de réduction des basses fréquences deux fois plus intense que l'opérateur de dérivée première discrète.

Dans la prochaine section on verra les signaux discrets en dimension 2, i.e. $z(n_1, n_2)$. En particulier, les image numérique sont des signaux 2D. Si on répète l'analyse que l'on vient de faire en dimension 2, on obtient les mêmes résultats. Cela explique qualitativement et quantitativement pourquoi, *l'opérateur de dérivée seconde (Laplacien) est plus efficace de l'opérateur de dérivée première (gradient) pour mettre en évidence les bords d'une image.*

2.8 La transformée de Fourier bidimensionnelle (DFT 2D)

La transformée de Fourier que l'on a considérée jusqu'à maintenant est appliquée à des signaux $z(n)$ qui dépendent seulement d'un paramètre n .

Dans les applications, on a des signaux très importants qui dépendent de plusieurs paramètres. Un exemple canonique est donné par les **images numériques** qui dépendent de deux paramètres : les *deux coordonnées spatiales d'un pixel*, comme dans la figure 2.13.

On peut généraliser la théorie de la DFT pour examiner des signaux qui dépendent de n'importe quel nombre (fini) de paramètres. Néanmoins, pour simplifier l'explication, on va considérer seulement le cas bidimensionnel de deux paramètres n_1, n_2 .

On va définir d'abord l'espace de travail : si $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, on définit

$$\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) = \{z : \mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2} \rightarrow \mathbb{C}\},$$

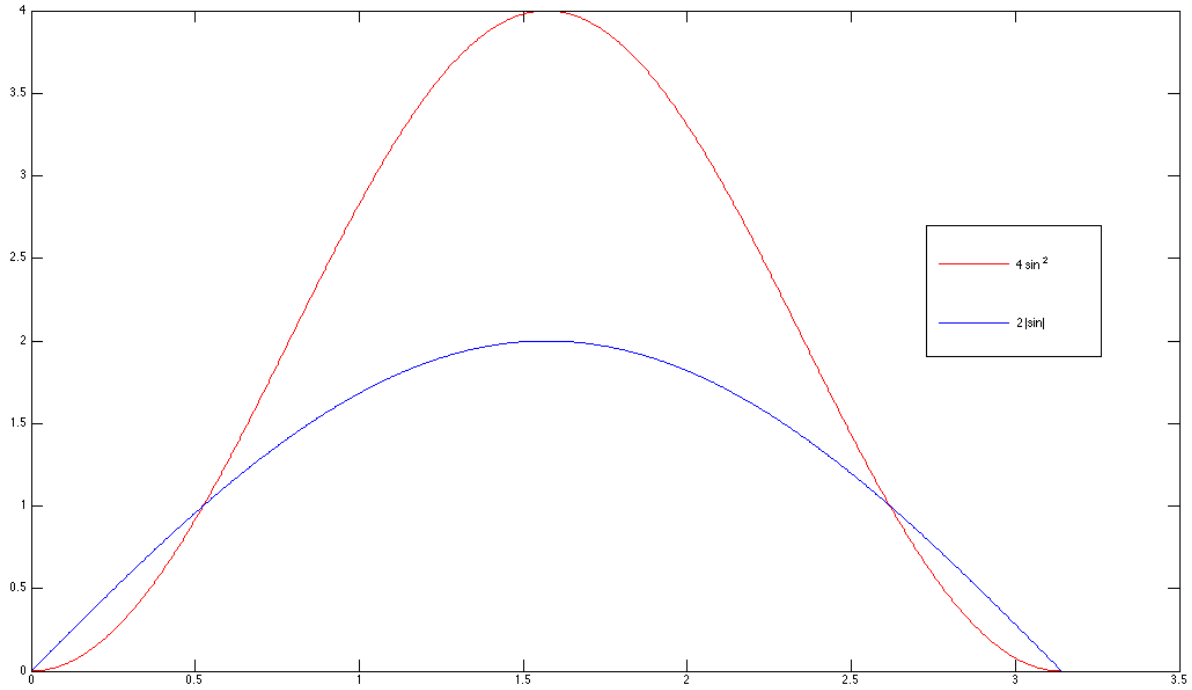


FIGURE 2.12 – Différence entre les fonctions sinusoidales qui représentent les valeurs du spectre de l'opérateur dérivée première et seconde entre 0 et π .

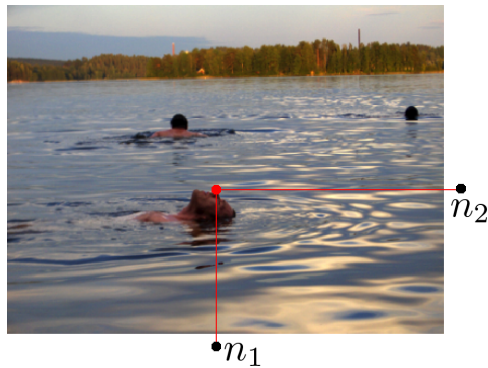


FIGURE 2.13 – Les deux coordonnées n_1, n_2 d'un pixel dans une image numérique.

$z \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ est une suite complexe qui dépend de deux paramètres :

$$\begin{cases} n_1 \in \{0, 1, \dots, N_1 - 1\} \\ n_2 \in \{0, 1, \dots, N_2 - 1\}. \end{cases}$$

$\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ est un espace vectoriel de dimension $N_1 \cdot N_2$ avec les définitions de somme et de produit par un scalaire complexe définies comme dans le cas 1D et produit scalaire :

$$\langle z, w \rangle = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} z(n_1, n_2) w(n_1, n_2)^*, \quad \forall z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}).$$

L'extension de la théorie de la DFT de 1D à 2D est basée sur la procédure de génération de bases de $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ à partir de bases de $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1})$ et de $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_2})$.

Théorème 2.42. Soient $\{B_0, B_1, \dots, B_{N_1-1}\}$, $\{C_0, C_1, \dots, C_{N_2-1}\}$, une base orthonormale de $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1})$ et de $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_2})$, respectivement.

On définit, $\forall m_1 \in \{0, \dots, N_1 - 1\}$ et $m_2 \in \{0, \dots, N_2 - 1\}$ les suites de $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ données par :

$$D_{m_1, m_2}(n_1, n_2) = B_{m_1}(n_1) \cdot C_{m_2}(n_2).$$

Alors, D_{m_1, m_2} est une base orthonormale de $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ dite la **base produit tensoriel** de deux bases initiales.

Démonstration. Les suites D_{m_1, m_2} , $m_1 \in \{0, \dots, N_1 - 1\}$, $m_2 \in \{0, \dots, N_2 - 1\}$ sont $N_1 \cdot N_2$ éléments de $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$, qui a dimension $N_1 \cdot N_2$. Donc, pour démontrer qu'ils sont une base orthonormale, on doit tout simplement montrer que :

$$\langle D_{m_1, m_2}, D_{k_1, k_2} \rangle = \delta_{(m_1, m_2), (k_1, k_2)} = \begin{cases} 1 & \text{si } (m_1, m_2) = (k_1, k_2) \\ 0 & \text{si } (m_1, m_2) \neq (k_1, k_2). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \langle D_{m_1, m_2}, D_{k_1, k_2} \rangle &\stackrel{\text{déf. de } \langle \cdot, \cdot \rangle}{=} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} D_{m_1, m_2}(n_1, n_2) D_{k_1, k_2}(n_1, n_2)^* \\ &\stackrel{\text{déf. de } D_{m_1, m_2}}{=} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} B_{m_1}(n_1) C_{m_2}(n_2) B_{k_1}(n_1)^* C_{k_2}(n_2)^* \\ &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} B_{m_1}(n_1) B_{k_1}(n_1)^* \sum_{n_2=0}^{N_2-1} C_{m_2}(n_2) C_{k_2}(n_2)^* \\ &= \underbrace{\langle B_{m_1}, B_{k_1} \rangle}_{\delta_{m_1, k_1}} \underbrace{\langle C_{m_2}, C_{k_2} \rangle}_{\delta_{m_2, k_2}} = \delta_{(m_1, m_2), (k_1, k_2)} \end{aligned}$$

□

Ce théorème a les corollaires suivantes, pour $m_1 \in \{0, 1, \dots, N_1 - 1\}$ et $m_2 \in \{0, 1, \dots, N_2 - 1\}$:

— La base orthonormale canonique de $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ est :

$$B = e_{m_1, m_2}(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } (n_1, n_2) = (m_1, m_2) \\ 0 & \text{si } (n_1, n_2) \neq (m_1, m_2) \end{cases}$$

— La base orthogonale de Fourier de $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ est

$$F_{m_1, m_2}(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} e^{2\pi i \frac{m_1 n_1}{N_1}} \cdot e^{2\pi i \frac{m_2 n_2}{N_2}} = \frac{1}{N_1 N_2} e^{2\pi i \left(\frac{m_1 n_1}{N_1} + \frac{m_2 n_2}{N_2} \right)}$$

— La base orthonormale de Fourier de $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ est

$$E_{m_1, m_2}(n_1, n_2) = \sqrt{N_1 N_2} F_{m_1, m_2}(n_1, n_2).$$

— La base orthogonale des exponentielles complexes de $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ est

$$\mathcal{E}_{m_1, m_2}(n_1, n_2) = N_1 N_2 F_{m_1, m_2}(n_1, n_2).$$

Grâce à la théorie des espaces vectoriels avec produit scalaire complexe que l'on a développé dans le chapitre 1, on peut généraliser la définition des coefficients de Fourier, DFT et IDFT à $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$. Soit $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$, alors :

$$\begin{aligned} \langle z, \mathcal{E}_{m_1, m_2} \rangle &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} z(n_1, n_2) \left(e^{2\pi i \frac{n_1 m_1}{N_1}} e^{2\pi i \frac{n_2 m_2}{N_2}} \right)^* \\ &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} z(n_1, n_2) e^{-2\pi i \frac{m_1 n_1}{N_1}} e^{-2\pi i \frac{m_2 n_2}{N_2}} \\ &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} z(n_1, n_2) e^{-2\pi i \left(\frac{m_1 n_1}{N_1} + \frac{m_2 n_2}{N_2} \right)}, \end{aligned}$$

donc on définit les **coefficients de Fourier** de $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ comme ceci :

$$\hat{z}(m_1, m_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} z(n_1, n_2) e^{-2\pi i \left(\frac{m_1 n_1}{N_1} + \frac{m_2 n_2}{N_2} \right)}.$$

Comme pour le cas 1D :

$$\hat{z}(0, 0) = N_1 N_2 \langle z \rangle,$$

où $\langle z \rangle$ est la moyenne de z .

On peut également généraliser la formule de synthèse au cas 2D comme ceci :

$$z(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} \hat{z}(m_1, m_2) e^{2\pi i \left(\frac{m_1 n_1}{N_1} + \frac{m_2 n_2}{N_2} \right)}.$$

En conséquence, les opérateurs DFT et IDFT peuvent être généralisés avec les formules suivantes :

$$\text{DFT 2D} \equiv \hat{\cdot} : \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) \\ z & \longmapsto & \hat{z}, \end{array}$$

où :

$$\hat{z}(m_1, m_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} z(n_1, n_2) e^{-2\pi i \left(\frac{m_1 n_1}{N_1} + \frac{m_2 n_2}{N_2} \right)},$$

et

$$\text{IDFT 2D} \equiv \check{\cdot} : \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) \\ z & \longmapsto & \check{z}, \end{array}$$

où :

$$\check{z}(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} z(m_1, m_2) e^{2\pi i \left(\frac{m_1 n_1}{N_1} + \frac{m_2 n_2}{N_2} \right)}.$$

2.8.1 Représentation matricielle de la DFT 2D : produit de Kronecker vs. itération de deux DFT 1D

La représentation matricielle de la DFT 2D dans la base canonique de $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ peut être construite grâce aux matrices de Vandermonde-Fourier W_{N_1} et W_{N_2} associées respectivement à la DFT 1D en $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1})$ et en $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_2})$.

L'opération dont on a besoin pour obtenir la représentation matricielle de la DFT 2D est dite « produit de Kronecker », qu'on va définir de suite.

Définition 2.43. *Données deux matrices A de dimension $m \times n$ et B de dimension $p \times q$:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix},$$

la matrice **produit de Kronecker** $A \otimes B$ est la matrice de dimension $mp \times nq$ définie par :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

On peut démontrer par calcul direct que la matrice associée à la DFT 2D dans la base canonique de $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ est la matrice de dimension $N_1N_2 \times N_1N_2$ donnée par :

$$\boxed{W_{N_1, N_2} = W_{N_1} \otimes W_{N_2}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\hat{z}(m_1, m_2) = W_{N_1} \otimes W_{N_2} z(n_1, n_2)}.$$

Malheureusement, le calcul de la matrice produit de Kronecker est trop lourd quand N_1 et N_2 sont grands. Dans la pratique, on préfère réécrire la DFT 2D comme l'itération de deux DFT 1D.

Pour comprendre comment l'on peut faire, *on doit interpréter $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ comme une matrice de N_2 vecteurs colonne de N_1 éléments :*

$$z(n_1, n_2) = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ z(\cdot, 0) & z(\cdot, 1) & \cdots & z(\cdot, N_2 - 1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{array} \right)}_{N_2 \text{ vecteurs colonne}} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ z(\cdot, 0) & z(\cdot, 1) & \cdots & z(\cdot, N_2 - 1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{array}} \right\} N_1 \text{ éléments pour chaque vecteur colonne.}$$

Par définition de DFT 2D on peut écrire :

$$\hat{z}(m_1, m_2) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \underbrace{\left(\sum_{n_1=0}^{N_1-1} z(n_1, n_2) e^{-2\pi i \frac{n_1 m_1}{N_1}} \right)}_{\hat{z}(m_1, n_2) = W_{N_1} z(n_1, n_2)} e^{-2\pi i \frac{n_2 m_2}{N_2}} = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} W_{N_1} z(n_1, n_2) e^{-2\pi i \frac{n_2 m_2}{N_2}}. \quad (2.47)$$

L'explication de la formule ci-dessus est la suivante : la sommation par rapport à l'index n_2 est la plus extérieure, donc *on fixe n_2 à chaque fois*. Avec n_2 fixé, $z(n_1, n_2)$ est un vecteur colonne, et donc la parenthèse que l'on a mis en évidence représente est la DFT 1D de ce

vecteur colonne, qui peut être obtenue en appliquant la matrice W_{N_1} à $z(n_1, n_2)$, n_2 fixé, comme correctement écrit ci-dessus.

Maintenant on a le problème que n_1 est fixe et que l'indice qui change est n_2 , donc $W_{N_1}(n_1, n_2)$ est un vecteur ligne et on peut pas lui appliquer W_{N_2} pour obtenir la DFT, car, comme on l'a vu dans la section 2.4, la DFT 1D est réalisée par le produit d'une matrice de Vandermonde-Fourier avec une suite représentée via un *vecteur colonne* !

La solution à ce problème consiste en transposer les deux côtés de l'équation (2.47), ceci transforme le vecteur ligne $\hat{z}(m_1, n_2)$ en un vecteur colonne et on peut donc calculer sa transformée de Fourier avec W_{N_2} :

$$\hat{z}(m_1, m_2)^t = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} (W_{N_1} z(n_1, n_2))^t e^{-2\pi i \frac{n_2 m_2}{N_2}},$$

maintenant $(W_{N_1} z(n_1, n_2))^t$ est un vecteur colonne, donc on peut calculer sa DFT en appliquant W_{N_2} :

$$\hat{z}(m_1, m_2)^t = W_{N_2} (W_{N_1} z(n_1, n_2))^t \stackrel{(AB)^t = B^t A^t}{=} W_{N_2} z(n_1, n_2)^t (W_{N_1})^t = W_{N_2} z(n_2, n_1) W_{N_1},$$

car $W_{N_1}^t = W_{N_1}$ (observer l'inter-change entre n_1 et n_2). Donc $\hat{z}(m_1, m_2)^t = W_{N_2} z(n_2, n_1) W_{N_1}$, et alors, pour trouver $\hat{z}(m_1, m_2)$, il suffit de transposer encore une fois les deux côtés :

$$\hat{z}(m_1, m_2) = (\hat{z}(m_1, m_2)^t)^t = (W_{N_2} z(n_2, n_1) W_{N_1})^t = W_{N_1} z(n_1, n_2) W_{N_2}.$$

La formule qui permet de calculer la DFT 2D d'une suite $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ est donc :

$$\boxed{\hat{z}(m_1, m_2) = W_{N_1} z(n_1, n_2) W_{N_2}}. \quad (2.48)$$

Il est important de souligner que l'équation (2.48) a du sens seulement si $\hat{z}(m_1, m_2)$ et $z(n_1, n_2)$ sont interprétées dans leur globalité comme des matrices $N_1 \times N_2$ (image numériques).

Cette formule est différente de $W_{N_1} W_{N_2} z(n_1, n_2)$ ou $W_{N_2} W_{N_1} z(n_1, n_2)$, qui sont les formules naïves que l'on aurait pu imaginer pour implémenter la DFT 1D sur les colonnes et sur les lignes de z . Comme on l'a vu, la raison de la différence est due au fait que la DFT 1D matricielle nécessite toujours un vecteur colonne, d'où vient la nécessité de la transposition, qui amène vers la formule (2.48).

2.8.2 Les propriétés de la DFT 2D

Les propriétés de la DFT 1D, que l'on a vu dans la section 2.6 peuvent être généralisées sans difficulté à la DFT 2D.

Les démonstrations sont pratiquement identiques, mais avec une notation plus lourde, pour cela, on présente l'extension bidimensionnelle des résultats relatifs à la DFT 1D sans preuve.

Comme dans le cas 1D, pour pouvoir discuter les propriétés de la DFT 2D, on doit d'abord étendre la définition d'une suite $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ par périodicité à tout intervalle de longueur N_1 par rapport à la variable n_1 et de longueur N_2 par rapport à la variable n_2 .

Cette extension est possible si on définit z hors de $\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}$ comme ceci :

$$\boxed{z(n_1 + j_1 N_1, n_2 + j_2 N_2) = z(n_1, n_2)}, \quad \forall n_1, n_2, j_1, j_2 \in \mathbb{Z}. \quad (2.49)$$

C'est aussi utile d'introduire l'opérateur de translation dans le cas bidimensionnel.

Définition 2.44. Soit $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ étendue par périodicité comme dans la formule (2.49) et $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. L'opérateur de translation sur $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ est défini par :

$$\begin{aligned} R_{k_1, k_2} : \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) \\ z &\longmapsto R_{k_1, k_2} z, \\ (R_{k_1, k_2} z)(n_1, n_2) &= z(n_1 - k_1, n_2 - k_2). \end{aligned}$$

Propriétés de la DFT 2D

Soit $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ étendue par périodicité comme dans la formule (2.49), alors, pour tout $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$:

— **Périodicité** de \hat{z} et \check{z} :

$$\boxed{\hat{z}(m_1, m_2) = \hat{z}(m_1 + N_1, m_2) = \hat{z}(m_1, m_2 + N_2) = \hat{z}(m_1 + N_1, m_2 + N_2)}$$

et

$$\boxed{\check{z}(n_1, n_2) = \check{z}(n_1 + N_1, n_2) = \check{z}(n_1, n_2 + N_2) = \check{z}(n_1 + N_1, n_2 + N_2)}.$$

— **DFT 2D et translation** :

$$\boxed{\widehat{R_{k_1, k_2} z}(m_1, m_2) = e^{-2\pi i \left(\frac{m_1 k_1}{N_1} + \frac{m_2 k_2}{N_2} \right)} \hat{z}(m_1, m_2)} \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z},$$

i.e. si on définit la suite $\omega_{N_1, N_2}^{k_1, k_2} \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$, $\omega_{N_1, N_2}^{k_1, k_2}(m_1, m_2) = e^{-2\pi i \left(\frac{m_1 k_1}{N_1} + \frac{m_2 k_2}{N_2} \right)}$ $\forall m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, alors :

$$\boxed{\text{DFT 2D} \circ R_k = M_{\omega_{N_1, N_2}^{k_1, k_2}} \circ \text{DFT 2D}},$$

où $M_{\omega_{N_1, N_2}^{k_1, k_2}}$ est l'opérateur de multiplication par $\omega_{N_1, N_2}^{k_1, k_2}$ dans $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$. Si on permute le sens de la composition on obtient :

$$\boxed{(R_{k_1, k_2} \hat{z})(m_1, m_2) = \hat{z}(m_1 - k_1, m_2 - k_2) = \text{DFT 2D} \left(e^{2\pi i \left(\frac{m_1 k_1}{N_1} + \frac{m_2 k_2}{N_2} \right)} z \right)(m_1, m_2)},$$

i.e.

$$\boxed{R_{k_1, k_2} \circ \text{DFT 2D} = \text{DFT 2D} \circ M_{\left(\omega_{N_1, N_2}^{k_1, k_2} \right)^*}}, \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

On peut résumer les propriétés que l'on vient d'analyser avec les couples de Fourier suivants :

Représentation originale	Espace de Fourier
$z(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$	$e^{-2\pi i \left(\frac{m_1 k_1}{N_1} + \frac{m_2 k_2}{N_2} \right)} \hat{z}(m_1, m_2)$
$e^{2\pi i \left(\frac{n_1 k_1}{N_1} + \frac{n_2 k_2}{N_2} \right)} z(n_1, n_2)$	$\hat{z}(m_1 - k_1, m_2 - k_2)$

Comme dans le cas de la DFT 1D, si on considère $k_1 = \frac{N_1}{2}$ et $k_2 = \frac{N_2}{2}$, alors $(-1)^{n_1 + n_2} z(n_1, n_2)$ et $\hat{z}(m_1 - \frac{N_1}{2}, m_2 - \frac{N_2}{2})$. Cette transformation est utilisée pour la visualisation centrée du spectre de z .

De plus, encore comme dans le cas mono-dimensionnel, le spectre d'amplitude d'un signal bidimensionnel $z(n_1, n_2)$ et d'une translation quelconque $z(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$ est exactement le même, car $\left| e^{-2\pi i \left(\frac{m_1 k_1}{N_1} + \frac{m_2 k_2}{N_2} \right)} \right| = 1$.

Donc, le spectre d'amplitude permet de connaître le contenu fréquentiel du signal, mais il ne permet pas de savoir où les fréquences sont localisées.

— DFT 2D et **conjugaison** :

$$\widehat{z^*}(m_1, m_2) = (\widehat{z}(-m_1, -m_2))^* = (\widehat{z}(N_1 - m_1, N_2 - m_2))^*.$$

— DFT 2D et **convolution** :

$$\widehat{(z * w)}(m_1, m_2) = \widehat{z}(m_1, m_2) \widehat{w}(m_1, m_2),$$

où la convolution bidimensionnelle est définie comme ceci :

$$\begin{aligned} T_z : \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) \\ w &\longmapsto T_z w = z * w, \end{aligned}$$

$$(z * w)(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} z(n_1 - k_1, n_2 - k_2) w(k_1, k_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} z(n_1, n_2) w(n_1 - k_1, n_2 - k_2).$$

2.8.3 La DFT 2D et les opérateurs stationnaires

La DFT 2D a les mêmes propriétés que la DFT 1D relativement aux opérateurs stationnaires.

Rigoureusement, un opérateur $T : \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ est stationnaire si :

$$T \circ R_{k_1, k_2} = R_{k_1, k_2} \circ T, \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Pratiquement, un opérateur $T : \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ est stationnaire si son action sur une suite $z(n_1, n_2)$ est indépendante de la position des paramètres (n_1, n_2) .

Si z est une image numérique, alors **un opérateur stationnaire est une transformation définie indépendamment de la position d'un pixel dans le support spatial de l'image**. Cela ne veut pas dire que le résultat de l'application de l'opérateur stationnaire ne change pas par rapport à la position du pixel, mais que la définition de l'opérateur ne change pas.

Un exemple d'opérateur stationnaire est donné par la transformation qui remplace l'intensité d'un pixel par sa moyenne locale, i.e. la moyenne calculé dans un voisinage d'une taille fixé du pixel.

Comme dans le cas mono-dimensionnel, les opérateurs stationnaires sur $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ peuvent être caractérisés comme des opérateurs de convolution ou comme des multiplicateurs de Fourier.

Avant d'énoncer le théorème qui formalise cette relation, on définit le multiplicateur de Fourier, l'impulsion unitaire et la réponse impulsionnelle dans le cas bidimensionnel.

Définition 2.45. Soit $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$, le multiplicateur de Fourier associé à z est défini comme ceci :

$$\begin{aligned} T_{(z)} : \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) \\ w &\longmapsto T_{(z)} w = \widehat{z} \cdot \widehat{w}. \end{aligned}$$

Définition 2.46. L'impulsion unitaire δ dans $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ est le premier vecteur de sa base canonique : $\delta = e_{0,0}$.

Donné un opérateur linéaire T sur $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$, on appelle réponse impulsionnelle la suite $h = T\delta \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$.

Théorème 2.47. Soit $T : \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ un opérateur linéaire, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) T est stationnaire ;
- (2) T est l'opérateur de convolution avec la réponse impulsionnelle $h = T\delta$:

$$Tz = T_h z = h * z = z * h \quad \forall z \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) ;$$

- (3) T est le multiplicateur de Fourier associé à \hat{h} :

$$Tz = T_{(\hat{h})} z = \widehat{\hat{h} \cdot \hat{z}} \quad \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) ;$$

- (4) T est diagonalisable, ses vecteurs propres sont la base orthogonale de Fourier F_{m_1, m_2} de $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$, et ses valeurs propres sont les composantes de \hat{h} .

Observation : on peut étendre aussi le résultat sur les matrices circulantes, mais leur définition dans le cas bidimensionnel est plus difficile.

2.8.4 Visualisation du spectre d'amplitude en 2D

La visualisation du spectre d'un signal 2D nécessite une procédure de centralisation pour les mêmes raisons que l'on a discuté dans le cas 1D et qui sont visualisées en deux dimensions dans la figure 2.14. Ceci peut être effectué via l'équivalent 2D de la translation du domaine de $z(n_1, n_2)$ définie dans les formules (2.31), (2.31) ou via l'équivalent 2D de la formule (2.38), i.e. en considérant $(-1)^{n_1+n_2} z(n_1, n_2)$ au lieu de $z(n_1, n_2)$, comme vu dans la section 2.8.2.

Le code MatLab pour visualiser le spectre d'amplitude d'une image est écrit ci-dessous.

```

1 im=imread('image.extension') % on charge l'image
2 A=fftshift( abs( fft2( im ) ) ); % on calcule le spectre d'amplitude avec ...
   abs de fft2 en on fait la translation avec fftshift
3 imshow(log(1+0.001*A), []) % pour mieux visualiser le spectre on utilise ...
   l'echelle logarithmique (voir commentaire en bas...)
```

Il faut observer, en particulier, que la symétrie mono-dimensionnelle de la DFT 1D par rapport aux fréquences $m \in \{0, 1, \dots, N/2\}$ et $m \in \{N/2 + 1, N/2 + 2, \dots, N - 1\}$ devient une *symétrie miroir* 2D pour la DFT 2D.

Dans la figure 2.15 on montre trois images numériques en niveau de gris et leur spectre d'amplitude. Les points les plus lumineux correspondent à des valeurs des modules de coefficients de Fourier grandes et, vice-versa, les point les plus sombres à des valeurs petites.

Il y a plusieurs caractéristiques à observer :

- La **symétrie** du spectre : le contenu fréquentiel est répété dans les quadrants par symétrie miroir ;

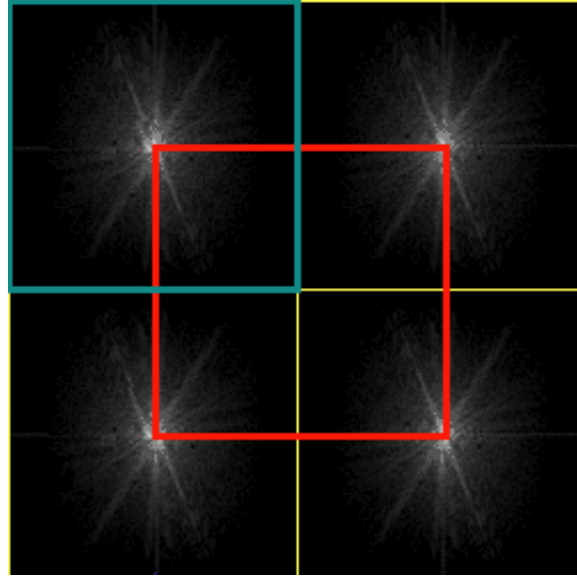


FIGURE 2.14 – *Carré rouge* : spectre d’amplitude d’une image centré dans la fréquence $(N/2, N/2)$. *Carré bleu* : spectre d’amplitude d’une image centré dans la fréquence $(0, 0)$. Pour plus de simplicité on a considéré une image carré de côté N , sinon on aurait des rectangles de côtés N_1 et N_2 .

- Les points les plus lumineux sont localisés vers le centre du spectre : ceci est dû au fait que les spectres que l’on montre sont centrés, donc la fréquence centrale a pour coordonnées $(m_1, m_2) = (0, 0)$ et $|\hat{z}(0, 0)| = N_1 N_2 \langle z \rangle$, i.e. $N_1 N_2$ fois la valeur moyenne de l’image. *Ceci explique pourquoi, pour visualiser le spectre, on doit appliquer le logarithme* : les valeurs de $|\hat{z}(0, 0)|$ sont tellement plus élevés des autres, qu’il faut compresser le rang de variabilité avec une fonction compressive comme le logarithme!
- Dès que l’on s’éloigne du centre, le spectre montre l’amplitude des coefficients qui correspondent aux fréquences les plus élevées, jusqu’aux fréquences maximales $(N_1/2, N_2/2)$, si N_1, N_2 sont paires, ou leurs parties entières $(\lfloor N_1/2 \rfloor, \lfloor N_2/2 \rfloor)$ si N_1, N_2 sont impaires. L’image avec le contenu fréquentiel le plus élevé est l’image du mandrill, en fait, on voit que son spectre est le plus étendu parmi les trois images. En particulier, on observe des valeurs très intenses vers les bords, qui représentent des fréquences très élevées : elles correspondent aux fréquences des détails très fins du poil à côté des yeux du mandrill.
- Comme m_1 et m_2 représentent les fréquences verticales et horizontales, les bords (« edges » en anglais) verticaux et horizontaux des images produisent des coefficients de Fourier localisés sur les axes correspondants. C’est pour cela que la première image, qui a des forts gradients d’intensité verticaux entre les rochers et le ciel, a un spectre avec une forte prédominance de coefficients de Fourier intenses sur l’axe vertical. Dans l’image de la deuxième ligne (« Lena », une des images les plus utilisées en traitement d’images), on a des détails fins dans le chapeau, à 45° et à -45° . De manière cohérente, on trouve dans son spectre des structures diagonales.
- L’analyse du spectre que l’on vient de faire montre qu’on peut comprendre l’existence de structures géométriques dans une image en regardant son spectre de Fourier, mais

on ne peut pas dire où ces structures sont situées dans l'image.

2.8.5 Un exemple remarquable de filtrage d'une image numérique dans l'espace de Fourier : le floutage

Le théorème 2.47 dit que tous les opérateurs stationnaires T qui agissent sur des images (interprétées comme des suites 2D finies) sont des convolutions « cachées » (entre l'image et la réponse impulsionnelle $h = T\delta$). De plus, ces convolutions peuvent être représentées comme des multiplicateurs de Fourier (multiplication dans l'espace de Fourier entre \hat{h} et la DFT 2D de l'image).

Selon la suite h avec laquelle on fait la convolution, on obtient des résultats différents. C'est souvent beaucoup plus simple d'interpréter l'effet d'une convolution en considérant le multiplicateur de Fourier associé.

En particulier, on veut comprendre ce que veut dire d'opérer une *convolution avec une Gaussienne discrète*, qu'on écrit $h(n_1, n_2)$.

Comme on le verra dans le chapitre 4, la transformée de Fourier d'une Gaussienne d'écart-type σ est encore une Gaussienne, mais avec un écart-type inversement proportionnel à σ . Donc, on peut essayer de comprendre la signification de la convolution d'une image $z(n_1, n_2)$ avec une Gaussienne $h(n_1, n_2)$ en analysant la multiplication suivante dans l'espace de Fourier : $\hat{z}(m_1, m_2) \cdot \hat{h}(m_1, m_2)$.

Dans la figure 2.16 on peut voir trois images qui correspondent à Gaussiennes 2D de taille 512×512 , l'intensité du pixel de position (n_1, n_2) est $h(n_1, n_2) = \exp\left(-\frac{n_1^2 + n_2^2}{2\sigma^2}\right)$ et l'écart type est $\sigma = 1, 5, 10$, respectivement.

Comme on l'a dit avant, les DFT 2D de h sont encore des Gaussiennes, mais avec un écart type proportionnel à $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$. Bien sûr, $h(0, 0) = 1$ et les valeurs de $\hat{h}(m_1, m_2)$ décroissent dès qu'on s'éloigne du centre, donc la multiplication dans l'espace de Fourier $\hat{z}(m_1, m_2) \cdot \hat{h}(m_1, m_2)$ fait décroître l'importance des harmoniques avec $(m_1, m_2) \neq (0, 0)$, qui sont associées aux détails de l'image. Alors, si on applique la IDFT 2D à $\hat{z}(m_1, m_2) \cdot \hat{h}(m_1, m_2)$ on peut reconstruire une image qui sera plus flou que l'image originelle.

Par conséquent, opérer la convolution avec une Gaussienne correspond, dans le traitement d'images, à une opération de floutage (« blurring » en anglais), comme on peut le voir dans la figure 2.17.

Le floutage peut être utile, par exemple, quand l'image originale est bruitée : le floutage rend le bruit moins percevable (mais aussi les bords moins nets).

La figure 2.18 montre une version continue du filtre fréquentiel de floutage. Le code Matlab pour flouter une image avec un filtre Gaussien est écrit ci-dessous.

```
1 % Gaussian Blurring in the Fourier Domain
2 % read the image (it must be in the same folder as the commands)
3 i=imread('lena.png');
4 % standard deviation, 5 in this case
5 s=5;
6 % gaussian filter with the same size as the image and standard deviation s
7 h=fspecial('gaussian',512,s);
8 % DFT of h and centered DFT of the image
9 H=fft2(h); I=fft2(fftshift(i));
10 % O is the puntual product (.* in Matlab and not only *) of H and I
11 O=H.*I;
```



FIGURE 2.15 – Colonne de gauche : images originales. Colonne de droite : spectres d'amplitude centrés des images de gauches, visualisés avec une échelle logarithmique.

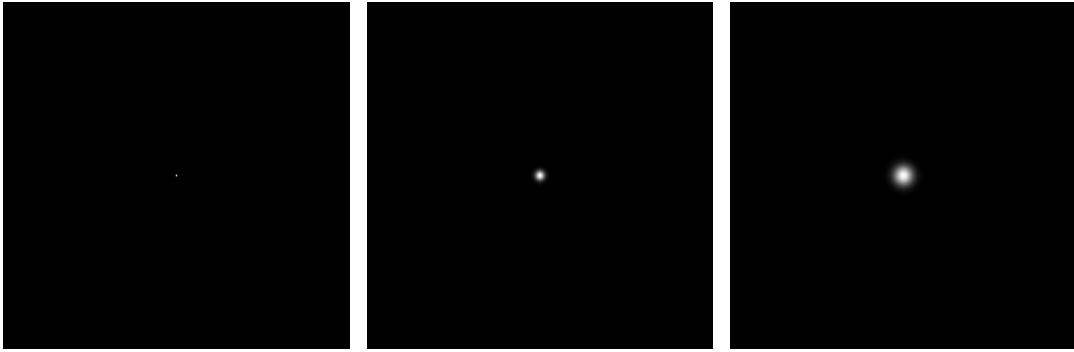


FIGURE 2.16 – De gauche à droite : images Gaussiennes bidimensionnelles avec un écart type 1,5,10.



FIGURE 2.17 – De gauche à droite : floutage de l'image de Lena par multiplication dans l'espace de Fourier avec les DFT des Gaussiennes d'écart type 1,5,10. Il faut observer que, comme la DFT d'une Gaussienne a un écart-type inversement proportionnel à l'écart-type originale, la DFT de la Gaussienne d'écart-type 10 a un écart-type petit et donc elle tend vers 0 rapidement. Donc, quand on fait le produit de la DFT de la Gaussienne d'écart-type 10 avec la DFT de l'image, on réduit énormément les détails de l'image.

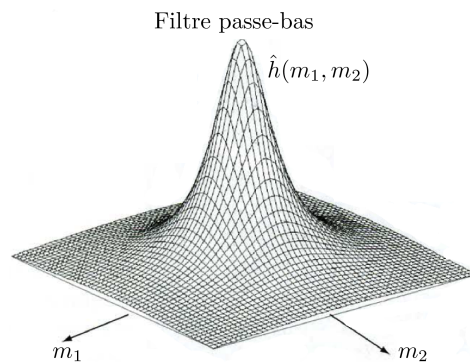


FIGURE 2.18 – Filtre de floutage, passe-bas dans le domaine fréquentiel.

```

12 % IDFT
13 o=ifft2(O);
14 % show the output o
15 imshow(o, [])

```

Observation importante : même si opérer la convolution avec une Gaussienne amène à l'effet de floutage, il ne faut pas penser que la convolution soit *toujours* liée à une opération de floutage. En fait, on a vu que la convolution, comme le multiplicateur de Fourier, est le prototype des opérateurs stationnaires, qui peuvent flouter ou rehausser les fréquences d'un signal.

Chapitre 3

Fonctions périodiques et séries de Fourier

Nous rappelons dans ce chapitre le cadre et les notations déjà vues au semestre précédent en cours d'*Analyse pour l'ingénieur 2*.

Dans de nombreuses situations physiques, on a à étudier des signaux périodiques (tension dans un circuit électrique, onde acoustique ou électromagnétique qui se propage dans un milieu, etc.). Un tel signal peut être compliqué à étudier et très irrégulier (non dérivable, non continu). L'idée des séries de Fourier est de pouvoir décomposer un signal périodique en terme de signaux plus simples. Le choix des séries de Fourier consiste à utiliser les fonctions simples suivantes

$$\begin{cases} \theta \mapsto \sin(n\theta), & n \geq 1, \\ \theta \mapsto \cos(n\theta), & n \geq 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Décomposer une fonction 2π -périodique en série de Fourier, cela sera écrire f comme somme de ces fonctions simples

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)), \quad (3.2)$$

où les coefficients $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ sont des coefficients à déterminer en fonction de f .

L'écriture (3.2) pose plusieurs problèmes :

- Il s'agit d'une somme infinie (autrement dit, de la somme d'une série). Est-elle convergente ? Est-elle divergente ? Absolument convergente ?
- Il s'agit de la convergence d'une suite de fonctions : quel sens donner à cette convergence par rapport à la variable θ ? est-elle vraie pour tout $\theta \in \mathbb{R}$? en moyenne par rapport à θ ? Uniformément par rapport à θ ?
- Peut-on décomposer n'importe quelle fonction en série de Fourier, aussi irrégulière soit-elle ?

3.1 Rappels sur la convergence L^2 des séries de Fourier

On se contente de rappeler les résultats du cours d'*Analyse pour l'ingénieur 2*. Pour les démonstrations, on renvoie au polycopié concerné.

3.1.1 Définitions

Le cadre de ce paragraphe est celui des fonctions périodiques de carré intégrable.

Fonctions périodiques

Définition 3.1. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, d'ensemble de définition I . On dit que f est périodique s'il existe $T \neq 0$, telle que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, [\theta \in I \Rightarrow \theta + T \in I], \text{ et, } \forall \theta \in I, f(\theta + T) = f(\theta).$$

On dit que T est **une** période de f . Dans ce cas, on dit aussi que f est T -périodique. Dans le cas où f admet une plus petite période $T > 0$, cette plus petite période est appelée la période fondamentale de f .

Remarque 3.2. Attention : si f est périodique, sa période n'est pas unique ! Si T est une période pour f , kT est aussi une période pour f , pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 3.3. Les fonctions suivantes sont périodiques :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta \mapsto \cos(n\theta)$ et $\theta \mapsto \sin(n\theta)$, de période fondamentale $T = \frac{2\pi}{n}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta \mapsto e^{in\theta}$ de période fondamentale $T = \frac{2\pi}{n}$.
- $\theta \mapsto \tan(\theta)$ est π -périodique.
- La fonction $\theta \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(\theta)$ (c'est-à-dire la fonction qui donne 1 si θ est rationnel et 0 si θ est irrationnel) est q -périodique, pour tout $q \in \mathbb{Q}$. Cette fonction n'admet pas de plus petite période positive.

La proposition suivante dit exactement qu'on peut toujours se ramener, via le changement de variables $\theta \mapsto \frac{\theta T}{2\pi}$, à une fonction 2π -périodique. Nous ne considérerons donc maintenant que des fonctions 2π -périodiques.

Proposition 3.4. Soit $T > 0$. Une fonction $\theta \mapsto f(\theta)$ est T -périodique si et seulement si $\theta \mapsto f\left(\frac{T\theta}{2\pi}\right)$ est 2π -périodique.

Fonctions intégrables

Nous définissons maintenant les fonctions intégrables et de carré intégrable :

Définition 3.5 (Fonctions intégrables). On définit

$$L_p^1(0, 2\pi) := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f, 2\pi\text{-périodique, } \int_0^{2\pi} |f(\theta)| d\theta < +\infty \right\} \quad (3.3)$$

comme l'ensemble des fonctions 2π -périodiques suffisamment régulières dont la restriction à $[0, 2\pi]$ est intégrable.

Remarque 3.6. Le terme suffisamment régulière est volontairement vague et fait référence au cours de théorie de la mesure et intégration, qui n'est pas au programme de ce module. Nous nous contenterons ici de savoir que ce terme englobe en particulier les fonctions continues par morceaux, ce qui est largement suffisant pour ce chapitre.

Attention : f est par hypothèse à valeurs complexes. Autrement dit, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on peut écrire $f(\theta) = \Re(f(\theta)) + i\Im(f(\theta))$.

Proposition 3.7. $f \in L_p^1(0, 2\pi)$ si et seulement si $\Re f$ et $\Im f$ sont dans $L_p^1(0, 2\pi)$ et dans ce cas les intégrales $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$, $\int_0^{2\pi} \Re f(\theta) d\theta$ et $\int_0^{2\pi} \Im f(\theta) d\theta$ ont un sens et on a l'égalité

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \Re f(\theta) d\theta + i \int_0^{2\pi} \Im f(\theta) d\theta.$$

Proposition 3.8. Soit $f \in L_p^1(0, 2\pi)$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, f est intégrable sur le segment $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ et $\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$. En particulier $\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$.

Définition 3.9 (Fonctions de carré intégrable). On définit

$$L_p^2(0, 2\pi) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f, 2\pi\text{-périodique}, \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta < +\infty\} \quad (3.4)$$

comme l'ensemble des fonctions 2π -périodiques suffisamment régulières dont la restriction à $[0, 2\pi]$ est de carré intégrable.

De plus, on peut munir $L_p^2(0, 2\pi)$ d'un produit scalaire complexe et d'une norme respectivement définies par, pour $f, g \in L_p^2(0, 2\pi)$,

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \bar{g}(\theta) d\theta \in \mathbb{C}, \quad (3.5)$$

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.6)$$

Remarque 3.10. Le fait que $\langle f, g \rangle$ soit bien défini pour $f, g \in L_p^2(0, 2\pi)$ vient de l'inégalité $|f(\theta)\bar{g}(\theta)| \leq \frac{1}{2}(|f(\theta)|^2 + |g(\theta)|^2)$ et du théorème de domination. Le fait que $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$ vérifie les propriétés requises d'un produit scalaire (voir Définition 1.3) est évident pour ce qui concerne la linéarité à gauche, l'anti-linéarité à droite et la symétrie. Le seul point problématique est le caractère défini-positif : est-il vrai que si $\|f\|_2 = 0$ alors $f = 0$? C'est en fait faux en toute généralité : la fonction f qui vaut 0 partout sauf en $\theta = 0$ où $f(0) = 2019$ est une fonction non nulle ($f(0) \neq 0$!) mais telle que $\|f\|_2 = 0$ (le fait de changer la valeur d'une fonction en un point ne change pas l'intégrale de cette fonction).

Ce problème est résolu dans un cours de théorie d'intégration de Lebesgue qui n'est pas un prérequis de ce cours. Pour faire court, une solution à ce problème est, d'identifier comme une seule et même fonction deux fonctions qui éventuellement diffèrent en un nombre fini (ou même dénombrable) de points. Ainsi selon cette identification, la fonction f ci-dessus est indistinguable de la fonction nulle.

Notons que si f est continue et si $\|f\|_2 = 0$, alors f est la fonction nulle.

3.1.2 Construction de fonctions périodiques

Prolongement par 2π -périodicité

Une façon usuelle de construire des fonctions 2π -périodiques est de partir d'une fonction définie sur un intervalle de longueur 2π (par exemple $]0, 2\pi]$ ou bien $] -\pi, \pi]$), puis d'étendre cette fonction par 2π -périodicité. Dans la plupart des cas, on assimilera la fonction f , définie sur $]\alpha, \alpha + 2\pi]$ à sa fonction périodisée \tilde{f} . On dit qu'on a prolongé f par 2π -périodicité.

Exemple 3.11 (Fonction créneau). Posons $f(\theta) = 1$ pour tout $\theta \in]0, \pi[$, $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$, et $f(\theta) = -1$ pour tout $\theta \in]\pi, 2\pi[$. La fonction périodisée de f est appelée une fonction créneau (voir Figure 3.1).

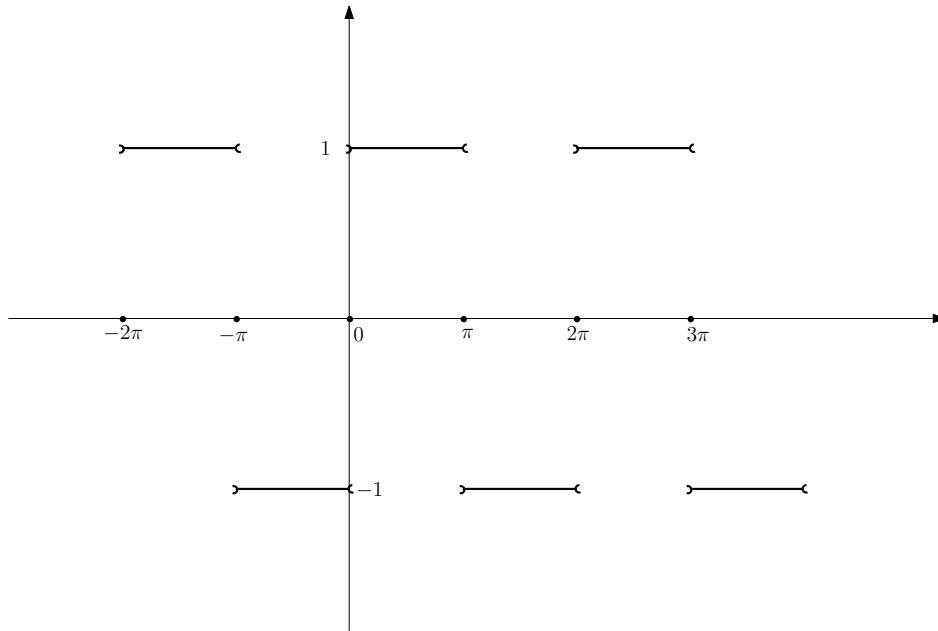


FIGURE 3.1 – Signal créneau

Prolongement par parité, puis 2π -périodicité

Il est aussi possible de partir d'une fonction définie sur $[0, \pi]$ (intervalle de longueur π), de la prolonger sur $[-\pi, \pi]$ par parité (c'est-à-dire en posant $f(\theta) = f(-\theta)$, pour tout $\theta \in [-\pi, 0]$) puis par 2π -périodicité comme au paragraphe précédent. La fonction ainsi définie est une fonction paire sur \mathbb{R} tout entier.

Exemple 3.12 (Signal triangulaire). *La fonction définie sur $f(\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta$ pour $\theta \in [0, \pi]$ prolongée par parité, puis par 2π -périodicité est appelée fonction (ou signal) triangulaire (voir Figure 3.2).*

Prolongement par imparité, puis par 2π -périodicité

De la même manière, il est possible de partir d'une fonction f définie sur $]0, \pi[$ (intervalle de longueur π), de la prolonger sur $] - \pi, \pi[$ par imparité (c'est-à-dire en posant $f(0) = 0$ et $f(\theta) = -f(-\theta)$, pour tout $\theta \in] - \pi, 0[$) puis par 2π -périodicité comme au paragraphe précédent. La fonction ainsi définie est une fonction impaire sur \mathbb{R} tout entier.

Remarque 3.13. *Le lecteur averti aura remarqué que nous n'avons pas explicitement défini la valeur de fonction f en π (cette valeur est la même que $f(\pi + 2k\pi)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ par 2π -périodicité). C'est en fait que $f(\pi)$ est nécessairement égal à 0 si f est impaire : en effet, si f est impaire $f(\pi) = -f(-\pi)$. De plus f est 2π -périodique, donc $f(\pi) = f(-\pi)$. Par conséquent, $f(\pi) = 0$.*

Exercice 3.14. *La fonction définie par $f(0) = 0$, $f(\theta) = 1$ pour tout $]0, \pi[$ et prolongée par imparité puis 2π -périodicité définit une fonction créneau.*

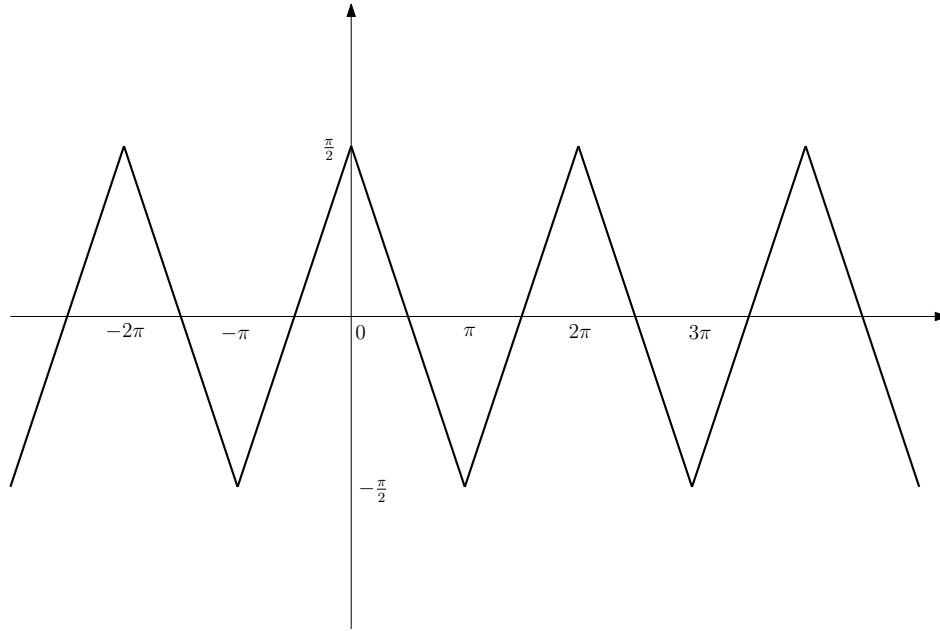


FIGURE 3.2 – Signal triangulaire

3.1.3 Coefficients de Fourier d'une fonction 2π -périodique

Définition 3.15. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit

$$e_n : \theta \mapsto e_n(\theta) = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Proposition 3.16. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e_n \in L_p^2(0, 2\pi)$ et

$$\langle e_n, e_m \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ 1 & \text{si } n = m. \end{cases}$$

Autrement dit $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une famille orthonormale de $L_p^2(0, 2\pi)$.

Définition 3.17. Soit $f \in L_p^2(0, 2\pi)$,

— on appelle coefficients de Fourier trigonométriques de f , la suite $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \langle f, e_n \rangle.$$

— on appelle coefficients de Fourier circulaires la donnée des deux suites $(a_n(f))_{n \geq 0}$ et $(b_n(f))_{n \geq 0}$ définies par, pour tout $n \geq 0$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta,$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta.$$

Remarque 3.18. Plusieurs remarques s'imposent :

1. On fera particulièrement attention au facteur devant chaque intégrale dans cette définition : il s'agit de $\frac{1}{2\pi}$ pour c_n et $\frac{1}{\pi}$ pour a_n et b_n ,
2. $\frac{a_0(f)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$ est appelée moyenne de f ; $b_0(f) = 0$.
3. La suite $c_n(f)$ est indexée par \mathbb{Z} alors que les suites $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont indexées par \mathbb{N} ,
4. D'après une proposition précédente, on peut changer les bornes d'intégration dans la définition précédente, à condition d'intégrer sur un intervalle de longueur 2π . En particulier, on utilisera souvent les définitions équivalentes

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}, \\
a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad n \geq 0, \\
b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta, \quad n \geq 0.
\end{aligned}$$

Il est équivalent de connaître les $c_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$ d'une part et les $(a_n(f), b_n(f))$, $n \geq 0$ d'autre part. En effet,

Proposition 3.19. *On a les relations suivantes :*

1. Pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{cases} a_n(f) &= c_n(f) + c_{-n}(f), \\ b_n(f) &= i(c_n(f) - c_{-n}(f)). \end{cases} \quad (3.7)$$

2. Pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{cases} c_n(f) &= \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}, \\ c_{-n}(f) &= \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Proposition 3.20. *Si f est à valeurs réelles, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,*

$$c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$$

et les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont réels.

Proposition 3.21. — *Si f est paire, $b_n(f) = 0$, pour tout $n \geq 0$,
— Si f est impaire, $a_n(f) = 0$, pour tout $n \geq 0$.*

3.1.4 Décroissance à l'infini des coefficients de Fourier

Il existe un lien entre la régularité de f d'une part et la vitesse de convergence vers 0 des coefficients de Fourier de f quand $|n| \rightarrow \infty$ d'autre part. Plus la fonction sera régulière, plus la convergence vers 0 sera rapide.

Proposition 3.22 (Lemme de Riemann-Lebesgue). *Si f est 2π -périodique et continue par morceaux, alors $c_n(f) \rightarrow 0$, quand $|n| \rightarrow \infty$.*

Proposition 3.23. *Si f est continue et \mathcal{C}^1 par morceaux alors pour $n \neq 0$,*

$$c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f').$$

En particulier, dans ce cas,

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right), \text{ quand } |n| \rightarrow \infty.$$

Plus généralement, pour tout $k \geq 1$, si f est de classe \mathcal{C}^{k-1} et \mathcal{C}^k par morceaux, alors

$$c_n(f) = \frac{1}{(in)^k} c_n(f^{(k)}) = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \text{ pour } |n| \rightarrow \infty.$$

Autrement dit, plus f est régulière, plus ses coefficients de Fourier convergent rapidement vers 0 en $+\infty$.

3.1.5 Notion de série de Fourier

Définition 3.24. *Soit $f \in L_p^2(0, 2\pi)$ et $N \geq 1$. On définit la fonction $\theta \mapsto S_N(f)(\theta)$ définie par : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$S_N(f)(\theta) := \sum_{k=-N}^N c_k(f) e^{ik\theta}. \quad (3.9)$$

Pour tout $N \geq 1$, $S_N(f)$ est une fonction 2π -périodique, de classe \mathcal{C}^∞ .

Remarque 3.25. *Si $\theta \in \mathbb{R}$ est fixé, $S_N(f)(\theta)$ est la somme partielle à l'ordre N de la série de terme général $(c_k(f) e^{ik\theta})_{k \in \mathbb{Z}}$. Attention : ici $k \in \mathbb{Z}$ et non $k \in \mathbb{N}$. On peut cependant se ramener au cas des séries indexées par \mathbb{N} en remarquant que*

$$S_N(f)(\theta) = c_0(f) + \sum_{k=1}^N \left(c_k(f) e^{ik\theta} + c_{-k}(f) e^{-ik\theta} \right).$$

Définition 3.26. *On appelle série de Fourier la fonction qui à $\theta \in \mathbb{R}$ associe la série numérique, à valeurs complexes, de terme général $(c_k(f) e^{ik\theta})_{k \in \mathbb{Z}}$. Dans le cas où pour un certain θ , $S_N(f)(\theta)$ converge, on appelle somme de la série de Fourier la limite de $S_N(f)$, notée $S(f)$, c'est à dire*

$$S(f)(\theta) := \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ik\theta}.$$

Remarque 3.27. *Insistons un peu : il y a deux façons équivalente de définir la série de Fourier de f .*

- *Le premier point de vue (et c'est celui adopté dans la définition précédente), c'est de dire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ **fixé**, on a affaire à une **série numérique** de terme général complexe, égal à $c_k(f) e^{ik\theta}$. Autrement dit, se donner une série de Fourier, c'est se donner une infinité de séries numériques, autant qu'il y a de valeurs de θ .*
- *Un autre point de vue, c'est de considérer directement $S_N(f)$ comme une **fonction** définie comme **la somme des fonctions** $\theta \mapsto c_k(f) e^{ik\theta}$. La série de Fourier de f peut donc être vue comme une série dont le terme général est à valeurs dans l'espace des fonctions 2π -périodiques.*

Soit on se donne une infinité de séries numériques, soit on se donne une seule série à valeurs dans l'espace des fonctions.

Etudier une série de Fourier revient donc à étudier des séries. La difficulté supplémentaire majeure vient bien sûr du fait que θ varie. Plus précisément, plusieurs questions se posent :

1. Quelles conditions sur f (et donc sur les coefficients $c_k(f)$) doit-on imposer pour que la série de Fourier de f converge ?
2. Quel sens donner à cette convergence ? est-ce vrai pour tout $\theta \in \mathbb{R}$? pour un seul θ ? Y a-t-il des θ pour lesquels la série converge, et d'autres pour lesquels elle ne converge pas ?
3. Dans le cas où la série converge, quel est le lien entre la somme de cette série et la fonction f elle-même ? Représente-t-elle bien la fonction f ? En quel sens ?

Expression de la série de Fourier en termes des coefficients a_n et b_n

En utilisant l'expression des c_n en fonction des coefficients a_n et b_n , il est possible de calculer une expression équivalente de la somme partielle de la série de Fourier associée à une fonction f . En effet, pour tout $N \geq 1$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} S_N(f)(\theta) &= c_0(f) + \sum_{k=1}^N \left(c_k(f)e^{ik\theta} + c_{-k}(f)e^{-ik\theta} \right), \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^N \left[\left(\frac{a_k(f) - ib_k(f)}{2} \right) (\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a_k(f) + ib_k(f)}{2} \right) (\cos(k\theta) - i \sin(k\theta)) \right] \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k(f) \cos(k\theta) + b_k(f) \sin(k\theta)). \end{aligned}$$

On en déduit donc

Proposition 3.28 (Expression de S_N en fonctions de coefficients de Fourier circulaires). *Une expression équivalente de $S_N(f)$ est donnée par : pour tout $N \geq 1$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$S_N(f)(\theta) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k(f) \cos(k\theta) + b_k(f) \sin(k\theta)).$$

3.1.6 Exemples de calculs de série de Fourier.

Le cas d'une fonction créneau

Proposition 3.29. *Soit H la fonction 2π -périodique, définie sur $]0, \pi[$ par $H(\theta) = 1$ et prolongée par imparité sur $] - \pi, \pi[$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,*

$$c_n(H) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{2}{in\pi} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \quad (3.10)$$

Démonstration. Remarquons donc que, par imparité de H , $H(0) = 0$ et $H(\theta) = -1$ pour tout $\theta \in]-\pi, 0[$. De plus, H est continue par morceaux, donc de carré intégrable sur $[-\pi, \pi]$ (NB : il est plus judicieux ici d'utiliser l'intervalle $[-\pi, \pi]$ que l'intervalle $[0, 2\pi]$, puisque nous connaissons directement la fonction H sur cet intervalle). En particulier, $c_0(H) = 0$ et pour $n \neq 0$

$$\begin{aligned} c_n(H) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 e^{-in\theta} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-in\theta} d\theta, \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-in\theta}}{-in} \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-in\theta}}{-in} \right]_0^{\pi}, \\ &= \frac{1}{2\pi in} (1 - e^{in\pi}) - \frac{1}{2\pi in} (e^{-in\pi} - 1), \\ &= \frac{1}{2\pi in} (1 - (-1)^n) - \frac{1}{2\pi in} ((-1)^n - 1). \end{aligned}$$

On conclut en distinguant les cas n pairs et n impairs. □

Exercice 3.30. Calculer directement $a_n(H)$ et $b_n(H)$ sans passer par $c_n(H)$.

Démonstration. Comme H est impaire, $a_n(H) = 0$ pour tout $n \geq 0$. De plus pour $n \geq 1$,

$$b_n(H) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\theta) \sin(n\theta) d\theta$$

Comme le produit de deux fonctions impaires est paire, il vient

$$b_n(H) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} H(\theta) \sin(n\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(n\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos(n\theta)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)).$$

Or, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ donc

$$b_n(H) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair,} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases} \quad (3.11)$$

Remarque : on vérifie bien que les valeurs trouvées de $a_n(H)$ et $b_n(H)$ sont cohérentes avec (3.7) et (3.8). □

Le cas d'un signal triangulaire

Proposition 3.31. Soit T la fonction 2π -périodique, définie sur $[0, \pi]$ par $T(\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta$ et prolongée par parité sur $]-\pi, \pi[$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(T) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{2}{n^2\pi} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \quad (3.12)$$

Démonstration. Comme T est paire par définition, nous savons que $T(\theta) = \theta + \frac{\pi}{2}$ pour tout $\theta \in [-\pi, 0]$. Pour $n = 0$, $c_0(T) = 0$. Pour $n \neq 0$, il vient, par intégrations par parties,

$$\begin{aligned}
c_n(T) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) e^{-in\theta} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(-\theta + \frac{\pi}{2}\right) e^{-in\theta} d\theta, \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{e^{-in\theta} \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}{-in} \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^0 e^{-in\theta} d\theta \right) + \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{e^{-in\theta} \left(-\theta + \frac{\pi}{2}\right)}{-in} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{in} \int_0^{\pi} e^{-in\theta} d\theta \right), \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi/2}{-in} + \frac{(-1)^n (-\pi/2)}{in} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^0 e^{-in\theta} d\theta \right) + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi/2 (-1)^n}{in} + \frac{\pi/2}{in} - \frac{1}{in} \int_0^{\pi} e^{-in\theta} d\theta \right), \\
&= \frac{1}{-4in} + \frac{(-1)^{n+1}}{4in} + \frac{1}{2\pi n^2} \left[e^{-in\theta} \right]_{-\pi}^0 + \frac{(-1)^n}{4in} + \frac{1}{4in} - \frac{1}{2\pi n^2} \left[e^{-in\theta} \right]_0^{\pi}, \\
&= \frac{1}{2\pi n^2} (1 - (-1)^n) - \frac{1}{2\pi n^2} ((-1)^n - 1).
\end{aligned}$$

Distinguant selon les cas n pair et n impair dans l'égalité précédente, le résultat suit. \square

Exercice 3.32. *Quel lien existe-t-il entre H et T ? Retrouver en particulier le résultat de la Proposition 3.23 dans ce cas particulier.*

Démonstration. On a évidemment la relation $H = -T'$, sauf en les points multiples de π (attention : ne pas oublier le $-$). Ainsi, en appliquant la Proposition 3.23, il vient $c_n(T) = -\frac{1}{in} c_n(H)$, ce qui est cohérent avec (3.10) et (3.12). \square

Exercice 3.33. *Calculer les coefficients $a_n(T)$ et $b_n(T)$ de deux façons différentes. L'une, en partant de l'expression de $c_n(T)$, l'autre en les calculant directement à partir de leur définition.*

Démonstration. Méthode 1 : on applique (3.7) : il vient $a_n(T) = c_n(T) + c_{-n}(T)$, ce qui vaut 0 si n est pair et vaut $\frac{2}{n^2\pi} + \frac{2}{(-n)^2\pi} = \frac{4}{n^2\pi}$ si n est impair. De plus, $b_n(T) = i(c_n(T) - c_{-n}(T)) = 0$.

Méthode 2 : comme T est pair, $b_n(T) = 0$. De plus, $a_n(T) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta) \cos(n\theta) d\theta$. Le produit de deux fonctions paires est pair donc $a_n(T) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} T(\theta) \cos(n\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cos(n\theta) d\theta$. On distingue ici le cas $n = 0$ du cas $n \geq 1$. Pour $n = 0$, on a $a_0(T) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) d\theta = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{(\frac{\pi}{2} - \theta)^2}{2} \right]_0^{\pi} = 0$. Ensuite, pour $n \geq 1$, par intégration par parties, cela donne : $a_n(T) = \frac{2}{\pi} \left(\left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \frac{\sin(n\theta)}{n} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\sin(n\theta)}{n} d\theta \right) = \frac{2}{\pi} \left(0 + \int_0^{\pi} \frac{\sin(n\theta)}{n} d\theta \right) = \frac{2}{n\pi} \left[\frac{-\cos(n\theta)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi} (1 - (-1)^n)$, ce qui vaut bien 0 si n est pair et $\frac{4}{n^2\pi}$ si n est impair. \square

3.1.7 Convergence en moyenne quadratique d'une série de Fourier

Définition 3.34. *On appelle polynôme trigonométrique de degré plus petit que $N \geq 0$ toute fonction p du type : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$p(\theta) = \sum_{k=-N}^N \alpha_k e^{ik\theta} = \sum_{k=-N}^N \alpha_k e_k(\theta),$$

où $\alpha_k \in \mathbb{C}$ pour tout $-N \leq k \leq N$. On note \mathcal{P}_N l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré plus petit que N . \mathcal{P}_N est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions 2π -périodiques de dimension $2N + 1$.

Exemple 3.35. Bien évidemment, pour tout $N \geq 1$, et $f \in L_p^2(0, 2\pi)$, $S_N(f) \in \mathcal{P}_N$.

Meilleure approximation quadratique d'une fonction

Soit $f \in L_p^2(0, 2\pi)$ et $N \geq 1$ et $S_N(f)$ la somme partielle de la série de Fourier de f à l'ordre N .

Théorème 3.36. Soit $N \geq 1$ et soit p un polynôme trigonométrique dans \mathcal{P}_N . Alors

$$\|f - S_N(f)\|_2^2 \leq \|f - p\|_2^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - S_N(f)(\theta)|^2 d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - p(\theta)|^2 d\theta.$$

Cette inégalité dit précisément que $S_N(f)$ est plus proche de f (au sens de la distance définie par la norme $\|\cdot\|_2$) que n'importe quel polynôme trigonométrique de degré au plus N . Ainsi, $S_N(f)$ réalise la meilleure approximation de f parmi les polynômes trigonométriques de degré au plus N , au sens quadratique.

Convergence quadratique

Théorème 3.37 (Inégalité de Bessel). Pour tout $f \in L_p^2(0, 2\pi)$, pour tout $N \geq 1$,

$$\|S_N(f)\|_2^2 = \sum_{k=-N}^N |c_k(f)|^2 \leq \|f\|_2^2,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=-N}^N |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta$$

Corollaire 3.38. Si $f \in L_p^2(0, 2\pi)$, la série de terme général $|c_k(f)|^2$ est convergente.

Le principal résultat de ce chapitre est le suivant :

Théorème 3.39 (Théorème de Parseval). Si $f \in L_p^2(0, 2\pi)$, la série de Fourier de f converge vers f en moyenne quadratique, c'est à dire que

$$\|f - S_N(f)\|_2^2 \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - S_N(f)(\theta)|^2 d\theta \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0.$$

De plus, la série de terme général $|c_k(f)|^2$ est convergente et on a l'égalité

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2.$$

Cette dernière égalité s'appelle l'égalité de Parseval.

Remarque 3.40. *Ce résultat est en particulier vrai pour une fonction 2π -périodique et continue par morceaux.*

Proposition 3.41 (Egalité de Parseval en terme des coefficients de Fourier circulaires). *Soit $f \in L_p^2(0, 2\pi)$, alors*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$$

3.1.8 Exemples et applications

Calculs de sommes de séries convergentes

Le cas de la fonction créneau H : Reprenons l'exemple de la fonction créneau H vue plus haut. H étant 2π -périodique et continue par morceaux, elle est de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$ et donc le théorème de Parseval s'applique :

- La série de terme général $|c_k(H)|^2$ est convergente, c'est-à-dire que la série de terme général 0 , si k est pair et $\frac{4}{k^2\pi^2}$ si k est impair est convergente. Remarquons tout de suite que ce résultat était évident, car la série de terme général $\frac{4}{(2p+1)^2\pi^2}$ est convergente, par critère de Riemann.
- On a de plus l'égalité :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(H)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |H(\theta)|^2 d\theta.$$

D'une part, le premier terme de cette égalité vaut $\sum_{k \text{ impair}} \frac{4}{k^2\pi^2} = 2 \sum_{k \text{ impair}, k > 0} \frac{4}{k^2\pi^2} = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{(2p+1)^2\pi^2}$. D'autre part, comme $|H(\theta)| = 1$ pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$ (non nul), le second terme de l'égalité vaut 1. Nous obtenons donc

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (3.13)$$

Remarque 3.42. *Notons qu'une astuce de calcul permet de déduire de (3.13) la valeur de la somme de Riemann (convergente car $2 > 1$) :*

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

En effet, distinguant les entiers pairs des entiers impairs, il vient

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2}, \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{S}{4} \end{aligned}$$

Et donc en simplifiant et en utilisant (3.13)

$$S = \frac{4}{3} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (3.14)$$

Le cas de la fonction triangulaire T Reprenons l'exemple de la fonction T vue plus haut. T étant 2π -périodique et continue, elle est de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$ et donc le théorème de Parseval s'applique :

- La série de terme général $|c_k(T)|^2$ est convergente, c'est-à-dire que la série de terme général $\frac{4}{k^4\pi^2}$ si k est impair est convergente. Remarquons tout de suite que ce résultat était évident, car la série de terme général $\frac{4}{(2p+1)^4\pi^2}$ est convergente, par critère de Riemann.
- On a de plus l'égalité :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(T)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |T(\theta)|^2 d\theta.$$

D'une part, le premier terme de cette égalité vaut $\sum_{k \text{ impair}} \frac{4}{k^4\pi^2} = 2 \sum_{k \text{ impair}, k > 0} \frac{4}{k^4\pi^2} = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{(2p+1)^4\pi^2}$. D'autre part,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |T(\theta)|^2 d\theta = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} |T(\theta)|^2 d\theta, \text{ par parité de la fonction } T$$

et un calcul immédiat montre que ce terme vaut $\frac{\pi^2}{12}$. Nous obtenons donc

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Applications des théorèmes de Bessel et de Parseval

Proposition 3.43 (Lemme de Riemann-Lebesgue). *Si $f \in L_p^2(0, 2\pi)$, alors $c_n(f) \rightarrow 0$ quand $|n| \rightarrow \infty$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du Corollaire 3.38. □

Proposition 3.44 (Injectivité des coefficients de Fourier). *Si f et g sont deux fonctions continues et 2π -périodiques telles que $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $f = g$.*

Remarque 3.45. *Cette proposition devient fausse si f n'est pas continue. Contre-exemple : f 2π -périodique telle que $f(0) = 1$ et $f(\theta) = 0$ pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$. Alors $c_n(f) = 0$ pour tout n mais f n'est pas la fonction nulle.*

3.2 Convergence ponctuelle des séries de Fourier

Dans le paragraphe précédent, nous avons étudié la convergence de la somme partielle de Fourier de f , $S_N(f) = \sum_{k=-N}^N c_k(f)e_k$, en moyenne quadratique, c'est-à-dire que si f est de carré intégrable,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - S_N(f)(\theta)|^2 d\theta \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0.$$

Ce résultat ne dit **absolument rien** sur l'éventuelle convergence de $S_N(f)(\theta)$, à θ fixé. Il est toujours possible de modifier f en un point θ_0 sans pour autant changer $S_N(f)$ ni le caractère intégrable de $|f|^2$, ni l'intégrale ci-dessus ; autrement dit, la convergence en moyenne quadratique est toujours vérifiée, mais ne renseigne pas sur la convergence de $S_N(f)(\theta_0)$. C'est le but de ce paragraphe que de regarder cet aspect.

3.2.1 Régularité des fonctions périodiques

Définition 3.46 (Continuité et continuité par morceaux). Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que :

1. f est une fonction continue sur \mathbb{R} si pour tout $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $\exists \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} f(\theta) = f(\theta_0)$,
2. On dit que f est continue par morceaux sur \mathbb{R} , si pour tout segment $[a, b]$ de \mathbb{R} , il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, telle que **toutes les conditions suivantes sont vérifiées**
 - Pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, f est une fonction continue sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$,
 - f admet une limite **finie** à droite et une limite **finie** à gauche en tout point de la subdivision x_i , pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$.

Définition 3.47 (Fonctions \mathcal{C}^1 et \mathcal{C}^1 par morceaux). Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que :

1. f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} si f est continue et dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée continue.
2. On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} , si pour tout segment $[a, b]$ de \mathbb{R} , il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, telle que **toutes les conditions suivantes sont vérifiées**
 - Pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$,
 - f admet une limite **finie** à droite et une limite **finie** à gauche en tout point de la subdivision x_i , pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$,
 - La dérivée de f , f' , admet une limite **finie** à droite et une limite **finie** à gauche en tout point de la subdivision x_i , pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$.

Plus généralement, on dit que f est \mathcal{C}^k par morceaux si elle est \mathcal{C}^{k-1} par morceaux et si sa dérivée $k-1$ ème est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux.

Dans le cas d'une fonction 2π -périodique, il suffit de vérifier la régularité de la fonction sur un intervalle de longueur 2π :

Proposition 3.48 (Continuité et continuité par morceaux d'une fonction périodique). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique. Soit $]\alpha, \alpha + 2\pi]$ un intervalle de longueur 2π . Alors

1. f est continue sur \mathbb{R} si et seulement si
 - f est continue sur l'intervalle $]\alpha, \alpha + 2\pi[$ **et**
 - $\exists \lim_{\theta \rightarrow \alpha, \theta > \alpha} f(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \alpha + 2\pi, \theta < \alpha + 2\pi} f(\theta) = f(\alpha)$.
2. f est continue par morceaux sur \mathbb{R} si et seulement si
 - f est continue par morceaux sur l'intervalle $]\alpha, \alpha + 2\pi[$ **et**
 - $\lim_{\theta \rightarrow \alpha, \theta > \alpha} f(\theta)$ existe et est finie
 - $\lim_{\theta \rightarrow \alpha + 2\pi, \theta < \alpha + 2\pi} f(\theta)$ existe et est finie.

Proposition 3.49 (Fonctions périodiques de classe \mathcal{C}^1 et \mathcal{C}^1 par morceaux). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique. Soit $]\alpha, \alpha + 2\pi]$ un intervalle de longueur 2π . Alors

1. f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} si et seulement si
 - f est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $]\alpha, \alpha + 2\pi[$ **et**
 - $\exists \lim_{\theta \rightarrow \alpha, \theta > \alpha} f(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \alpha + 2\pi, \theta < \alpha + 2\pi} f(\theta) = f(\alpha)$, **et**
 - $\exists \lim_{\theta \rightarrow \alpha, \theta > \alpha} f'(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \alpha + 2\pi, \theta < \alpha + 2\pi} f'(\theta)$.

Dans ce cas, f est dérivable en α , de dérivée, la limite commune des deux dérivées précédentes en α .

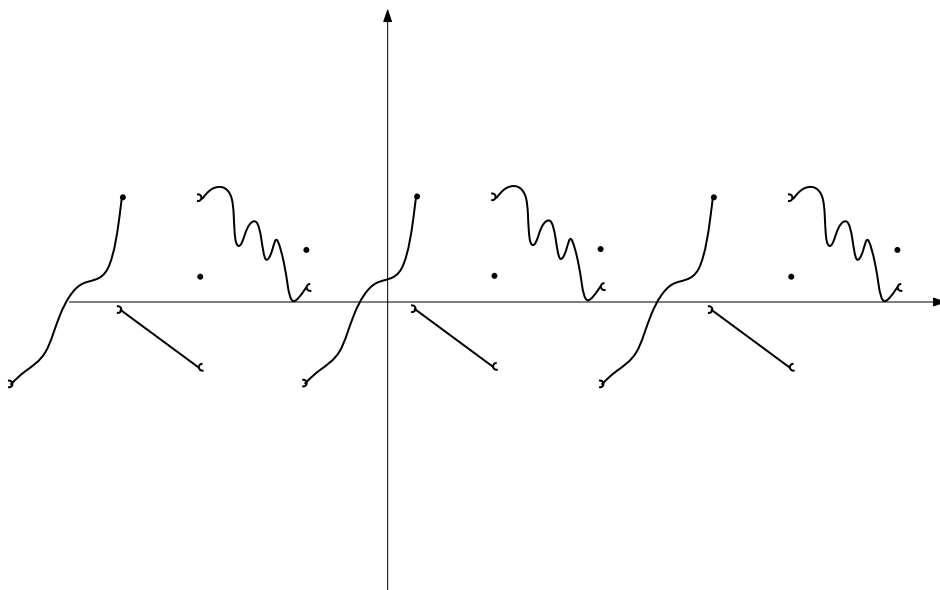


FIGURE 3.3 – Une fonction \mathcal{C}^1 par morceaux.

2. f est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} si et seulement si
- f est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur l'intervalle $]\alpha, \alpha + 2\pi[$ et
 - $\lim_{\theta \rightarrow \alpha, \theta > \alpha} f(\theta)$ existe et est finie,
 - $\lim_{\theta \rightarrow \alpha + 2\pi, \theta < \alpha + 2\pi} f(\theta)$ existe et est finie,
 - $\lim_{\theta \rightarrow \alpha, \theta > \alpha} f'(\theta)$ existe et est finie,
 - $\lim_{\theta \rightarrow \alpha + 2\pi, \theta < \alpha + 2\pi} f'(\theta)$ existe et est finie.

Exemple 3.50. La fonction créneau définie en Figure 3.1 est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. La fonction triangle (Figure 3.2) est continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux.

3.2.2 Convergence normale de la série de Fourier.

Définition 3.51. Soit une fonction f continue par morceaux, 2π -périodique. On définit la norme infinie de f comme

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(\theta)|.$$

Proposition 3.52. Si f est continue par morceaux, et $\|f\|_{\infty} = 0$, alors f est la fonction nulle.

Démonstration. En effet, on a alors $|f(\theta)| = 0$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ et donc pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ par 2π -périodicité. \square

Définition 3.53. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions. On dit que la série de terme général f_n converge normalement si

$$\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty} < \infty.$$

Les séries de fonctions normalement convergentes bénéficient de bonnes propriétés :

Proposition 3.54. Si $(f_n)_{n \geq 1}$ est le terme général d'une série de fonctions **normalement convergente**, alors :

1. pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la série numérique de terme général $f_n(\theta)$ est absolument convergente et donc convergente. On note $S(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\theta)$ la somme de cette série.
2. Si f_n est continue pour tout $n \geq 1$, $\theta \mapsto S(\theta)$ est une fonction continue.
3. **Propriété d'intégration terme-à-terme des séries de fonctions normalement convergentes** : si f_n est continue pour tout $n \geq 1$ alors pour tout segment $I \subset \mathbb{R}$, la série de terme général $\int_I f_n(\theta) d\theta$ est absolument convergente et on a

$$\int_I S(\theta) d\theta = \sum_{n \geq 1} \int_I f_n(\theta) d\theta.$$

- Démonstration.*
1. Ce fait vient de l'observation que, par définition de $\|\cdot\|_\infty$, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $n \geq 1$, $|f_n(\theta)| \leq \|f_n\|_\infty$. Par théorème de comparaison des séries absolument convergentes, la série de terme général $(f_n(\theta))_{n \geq 1}$ est donc absolument convergente, donc convergente.
 2. Soit $S(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\theta)$. Soit $\theta_0 \in \mathbf{R}$, montrons que S est continue en θ_0 . Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty$, il existe $N \geq 1$ tel que $\sum_{k=N}^{+\infty} \|f_k\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Mais alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$|S(\theta) - S(\theta_0)| \leq \left| \sum_{k=1}^{N-1} (f_k(\theta) - f_k(\theta_0)) \right| + 2 \sum_{k=N}^{+\infty} \|f_k\|_\infty \leq \left| \sum_{k=1}^{N-1} (f_k(\theta) - f_k(\theta_0)) \right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, $\sum_{k=1}^{N-1} f_k$ est une somme **finie** de fonctions continues, donc est continue. Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $|\theta - \theta_0| < \eta$, $\left| \sum_{k=1}^{N-1} (f_k(\theta) - f_k(\theta_0)) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc $|S(\theta) - S(\theta_0)| \leq \varepsilon$, ce qui prouve la continuité de S .

3. Soit $I = [a, b]$. Alors $\left| \int_I f_n(\theta) d\theta \right| \leq \int_I |f_n(\theta)| d\theta \leq (b-a) \|f_n\|_\infty$. Par théorème de comparaison, la série de terme général $\int_I f_n(\theta) d\theta$ est donc absolument convergente. De plus,

$$\begin{aligned} & \left| \int_I S(\theta) d\theta - \sum_{n=1}^{+\infty} \int_I f_n(\theta) d\theta \right| \\ &= \left| \int_I \sum_{k=1}^{N-1} f_k(\theta) d\theta + \int_I \sum_{k=N}^{+\infty} f_k(\theta) d\theta - \sum_{k=1}^{N-1} \int_I f_k(\theta) d\theta - \sum_{k=N}^{+\infty} \int_I f_k(\theta) d\theta \right| \\ &= \left| \int_I \sum_{k=N}^{+\infty} f_k(\theta) d\theta - \sum_{k=N}^{+\infty} \int_I f_k(\theta) d\theta \right| \\ &\leq \left| \int_I \sum_{k=N}^{+\infty} f_k(\theta) d\theta \right| + \left| \sum_{k=N}^{+\infty} \int_I f_k(\theta) d\theta \right| \\ &\leq \int_I \sum_{k=N}^{+\infty} |f_k(\theta)| d\theta + \sum_{k=N}^{+\infty} \int_I |f_k(\theta)| d\theta \leq 2(b-a) \sum_{k=N}^{+\infty} \|f_k\|_\infty, \end{aligned}$$

où N est un entier quelconque. Comme la série $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente, son reste $\sum_{k=N}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$ tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$. Passant à la limite pour $N \rightarrow \infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient le résultat. \square

Rappelons que par définition $e_k(\theta) = e^{ik\theta}$.

Proposition 3.55. Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes. Si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < +\infty$, alors la série de fonctions de terme général $c_k e_k$ est normalement convergente. De plus,

1. pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la série de terme général $c_n e^{in\theta}$ est convergente, de somme $S(\theta)$,
2. La fonction $\theta \mapsto S(\theta)$ est continue et 2π -périodique,
3. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le nième coefficient de Fourier de S , $c_n(S)$ est égal à c_n .

Démonstration. $\|c_n e_n\|_\infty = |c_n|$, donc $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|c_n e_n\|_\infty < \infty$ et donc la série de terme général $(c_n e_n)$ est donc normalement convergente. Par la proposition précédente, la série de terme général $c_n e^{in\theta}$ converge vers $S(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et la fonction $\theta \mapsto S(\theta)$ est continue. Le fait qu'elle soit 2π -périodique vient du fait que pour tout $n \geq 1$, $\theta \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\theta}$ est 2π -périodique et que cette propriété est encore vraie à la limite pour $n \rightarrow \infty$. De plus, en utilisant la propriété d'intégration terme-à-terme, on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} c_n(S) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\theta} \right) e^{-in\theta} d\theta, \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} e^{-in\theta} d\theta \right), \\ &= c_k. \end{aligned}$$

Attention, le fait d'échanger la somme infinie et l'intégrable ci-dessus n'est pas une trivialité, c'est un théorème, qui est justifié par le fait que la série converge normalement. \square

Corollaire 3.56. Si f est continue et si la série de terme général $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est **absolument convergente**, alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la somme partielle de la série de Fourier à l'ordre $N \geq 1$ en θ , $S_N(f)(\theta)$, converge vers $f(\theta)$, pour $N \rightarrow \infty$. Autrement dit, sous ces hypothèses, f est en tout point égale à sa série de Fourier : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{in\theta}.$$

Démonstration. Appliquons la proposition précédente au cas où $c_n = c_n(f)$ qui est bien par hypothèse le terme général d'une série absolument convergente. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $S_N(f)(\theta) = \sum_{k=-N}^N c_k(f) e^{ik\theta}$ converge vers un certain $S(\theta)$ pour $N \rightarrow \infty$. Cette fonction S est continue et 2π -périodique et on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(S) = c_n = c_n(f)$. S et f sont donc deux fonctions continues ayant les mêmes coefficients de Fourier, donc $f = S$. D'où le résultat. \square

A la lumière de la proposition précédente, la question est donc de savoir à quelle condition sur f , nous savons que la série de terme général $c_n(f)$ est absolument convergente.

Le cas f de classe \mathcal{C}^2

Proposition 3.57 (Convergence normale de la série de Fourier pour f de classe \mathcal{C}^2). *Si f est 2π -périodique et de classe \mathcal{C}^2 , alors $c_n(f) = o(\frac{1}{n^2})$, pour $|n| \rightarrow \infty$. En particulier, la série de terme général $c_n(f)$ est absolument convergente, la série de Fourier de f est normalement convergente, et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$f(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{in\theta}.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du paragraphe précédent et de la Proposition 3.23. \square

Le cas f continue et \mathcal{C}^1 par morceaux

Proposition 3.58 (Convergence normale de la série de Fourier pour f continue \mathcal{C}^1 par morceaux). *Si f est continue et \mathcal{C}^1 par morceaux, alors la série de terme général $c_n(f)$ est absolument convergente, la série de Fourier de f est normalement convergente, et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$f(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{in\theta}.$$

Démonstration. La fonction f est \mathcal{C}^1 par morceaux, donc sa dérivée f' est continue par morceaux, donc de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$ (i.e. $f' \in L_p^2(0, 2\pi)$). De plus, par Proposition 3.23, $c_n(f') = inc_n(f)$. Par théorème de Parseval appliqué à $f' \in L_p^2(0, 2\pi)$, nous obtenons que la série de terme général $|c_n(f')|^2 = n^2 |c_n(f)|^2$ est convergente. Par conséquent,

$$|c_n(f)| = |nc_n(f)| \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \left(n^2 |c_n(f)|^2 + \frac{1}{n^2} \right).$$

Le terme de droite de l'inégalité précédente est le terme général d'une série convergente. Par théorème de domination, on obtient donc que la série de terme général $c_n(f)$ est absolument convergente. Le reste est une conséquence immédiate du Corollaire 3.56. \square

Nous avons répondu à la question initiale de ce chapitre dans le cas où f est continue et \mathcal{C}^1 par morceaux : dans ce cas, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on peut reconstituer $f(\theta)$ en terme de la série de Fourier de f au point θ . Qu'en est-il si f est moins régulière que cela ? La réponse est l'objet du paragraphe suivant.

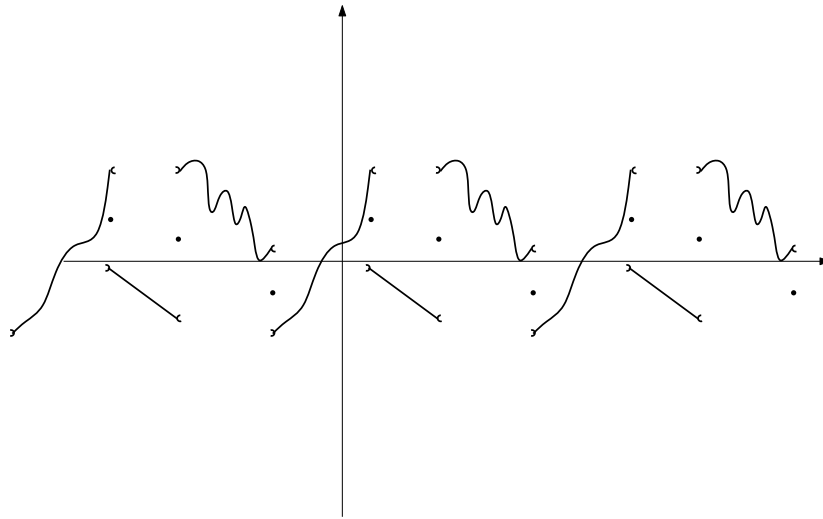
3.2.3 Théorème de Dirichlet

Hypothèses et énoncé

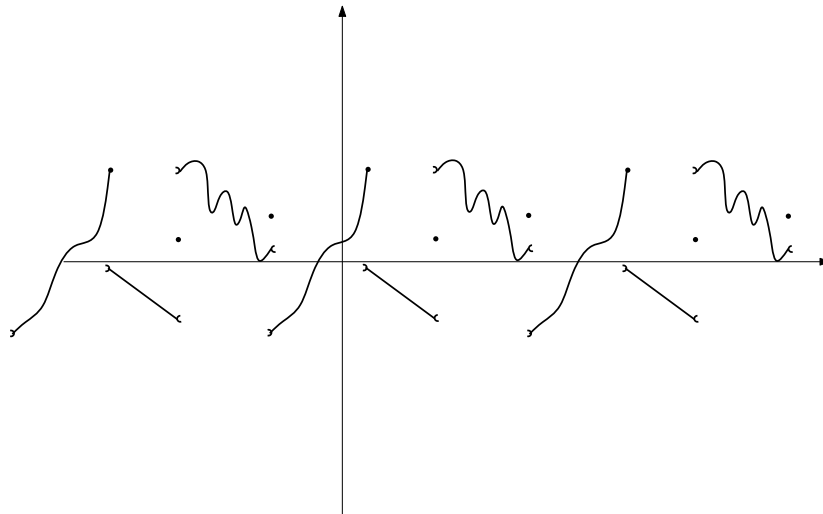
Dans ce paragraphe, nous nous posons la même question ($f(\theta)$ est-elle égale à la somme de la série de Fourier en θ ?) dans le cas où f est moins régulière que continue et \mathcal{C}^1 par morceaux. Pour définir la bonne régularité de f , nous avons besoin de définitions supplémentaires :

Définition 3.59. *Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on notera $f(\theta^+)$ (respectivement $f(\theta^-)$) la limite de f en θ par valeurs supérieures (respectivement inférieures), si bien sûr cette limite existe.*

Définition 3.60 (Fonction de Dirichlet). *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est une fonction de Dirichlet si elle vérifie les trois conditions suivantes :*



(a) Une fonction de Dirichlet.



(b) Une fonction qui n'est pas de Dirichlet.

1. f est 2π -périodique,
2. f est continue par morceaux (et donc $f(\theta^+)$ et $f(\theta^-)$ existent en tout point θ),
3. pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$f(\theta) = \frac{f(\theta^+) + f(\theta^-)}{2}. \quad (3.15)$$

Remarque 3.61. La condition (3.15) dit exactement qu'en tout point $\theta \in \mathbb{R}$, la valeur de f en θ est la moyenne de la limite à droite et de la limite à gauche de f en θ . Cette condition est trivialement vérifiée en tout point où f est continue. C'est seulement aux éventuels points de discontinuité de f que cette condition est non triviale.

Définition 3.62 (Notion de dérivée généralisée). Soit f une fonction de Dirichlet et $\theta \in \mathbb{R}$. On dit que f possède une dérivée généralisée à droite en $\theta \in \mathbb{R}$ si

$$\frac{f(\theta + h) - f(\theta^+)}{h}$$

admet une limite finie quand $h \rightarrow 0, h > 0$. Si cette limite existe, on la notera $f_a(\theta^+)$.

La même définition existe à gauche : on dit que f possède une dérivée généralisée à gauche en $\theta \in \mathbb{R}$ si

$$\frac{f(\theta + h) - f(\theta^-)}{h}$$

admet une limite finie quand $h \rightarrow 0, h < 0$. Si cette limite existe, on la notera $f_g(\theta^+)$ (d : droite, g : gauche).

Remarque 3.63. Cette notion de dérivée à droite et/ou à gauche se traduit géométriquement par l'existence de demi-tangentes au point considéré.

Exemple 3.64. Si f est C^1 par morceaux, alors, par définition, f possède une dérivée généralisée à droite et à gauche en tout point.

Le principal théorème de ce paragraphe est le suivant :

Théorème 3.65 (Théorème de Dirichlet). Soit f une fonction de Dirichlet et $\theta \in \mathbb{R}$. Si la fonction f possède des dérivées généralisées à droite et à gauche au point θ , alors la série de Fourier évaluée en θ converge vers $f(\theta)$.

Remarque 3.66. Sous les mêmes hypothèses sur f en enlevant la condition (3.15), on obtient la convergence de $S_N(f)(\theta)$ vers $\frac{f(\theta^+) + f(\theta^-)}{2}$.

Avant de prouver ce théorème, donnons des applications de ce résultat au calcul de sommes de séries usuelles.

Exercice 3.67. Soit f fonction de Dirichlet telle que $f(\theta) = \theta$, pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$. Montrer en utilisant le théorème de Dirichlet que pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$, la série de terme général $\frac{\sin(n\theta)}{n}$ est convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\theta}{2}.$$

En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

3.2.4 Preuve du Théorème de Dirichlet

Définition 3.68. On définit le noyau de Dirichlet par : pour tout $N \geq 1$

$$D_N : \theta \mapsto \sum_{k=-N}^N e^{ik\theta}.$$

Lemme 3.69. Pour tout $N \geq 1$,

1. D_N est réelle, 2π -périodique, paire et continue,
2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$D_N(\theta) = \frac{\sin((N + 1/2)\theta)}{\sin(\theta/2)}$$

3. pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$S_N(f)(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta - u) D_N(u) du.$$

4.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(u) du = 1.$$

Démonstration. Le premier item, facile, est laissé à titre d'exercice. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ non congru à 0 modulo 2π , en utilisant l'astuce de calcul usuelle de factorisation par l'exponentielle de la demi-somme

$$\begin{aligned} D_N(\theta) &= \frac{e^{-iN\theta} - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}, \\ &= \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} e^{-i(N+1/2)\theta} - e^{i(N+1/2)\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} = \frac{\sin((N+1/2)\theta)}{\sin(\theta/2)}. \end{aligned}$$

Ceci est encore vrai pour $\theta \equiv 0[2\pi]$, car dans ce cas $D_N(\theta) = 2N + 1$, ce qui est exactement la limite du terme précédent pour $\theta \rightarrow 0$. Par ailleurs, pour tout $N \geq 1$, $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} S_N(f)(\theta) &= \sum_{k=-N}^N c_k(f) e^{ik\theta}, \\ &= \sum_{k=-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) e^{-iku} du \right) e^{ik\theta}, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) \sum_{k=-N}^N e^{ik(\theta-u)} du, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) D_N(\theta - u) du, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-2\pi}^{\theta} f(\theta - v) D_N(v) dv, \quad (\text{par changement de variables linéaire}), \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta - v) D_N(v) dv, \quad (\text{par } 2\pi\text{-périodicité}). \end{aligned}$$

L'item 4 est évident, sachant que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, sauf pour $k = 0$ auquel cas cette intégrale vaut 1. \square

Démonstration du Théorème 3.65. Ecrivons pour tout $N \geq 1$, tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} S_N(f)(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - u) D_N(u) du, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(\theta - u) D_N(u) du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta - u) D_N(u) du, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(\theta - u) + f(\theta + u)) D_N(u) du, \quad \text{par parité de } D_N. \end{aligned}$$

Deuxièmement, comme est f est une fonction de Dirichlet, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, et sachant que par parité de D_N , $\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_N(u) du = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{f(\theta^+) + f(\theta^-)}{2} = (f(\theta^+) + f(\theta^-)) \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_N(u) du, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_N(u) (f(\theta^+) + f(\theta^-)) du. \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned} S_N(f)(\theta) - f(\theta) &= \frac{1}{2\pi} (f(\theta - u) + f(\theta + u) - f(\theta^+) - f(\theta^-)) D_N(u) du, \\ &= (f(\theta - u) + f(\theta + u) - f(\theta^+) - f(\theta^-)) \left(\frac{\sin((N + 1/2)u)}{2\pi \sin(u/2)} \right) du, \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h_\theta(u) \sin((N + 1/2)u) du, \end{aligned}$$

avec

$$h_\theta(u) = \frac{f(\theta - u) + f(\theta + u) - f(\theta^+) - f(\theta^-)}{2 \sin(u/2)}.$$

Le dernier terme ressemble à un coefficient de Fourier. Que peut-on dire sur la fonction h_θ ? h_θ possède des limites en θ^+ et θ^- (par hypothèse sur f) et h_θ se prolonge en une fonction continue par morceaux. De plus h_θ est impaire donc $h_\theta(\cdot) \sin((N + 1/2)\cdot)$ est paire. Par conséquent,

$$\begin{aligned} S_N(f)(\theta) - f(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi h_\theta(u) \sin((N + 1/2)u) du, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi h_\theta(u) \sin(u/2) \cos(Nu) du + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi h_\theta(u) \cos(u/2) \sin(Nu) du. \end{aligned}$$

Ces deux derniers termes sont les coefficients de Fourier (à un coefficient $1/2$ près) d'une fonction continue par morceaux. Par Lemme de Riemann-Lebesgue, ces deux quantités tendent vers 0 quand $N \rightarrow \infty$, ce qui donne le résultat. \square

3.3 Phénomène de Gibbs

Ce phénomène illustre le principe selon lequel les séries de Fourier se comportent mal vis-à-vis des fonctions qui ne sont pas continues.

Que savons-nous à propos de la convergence de la série de Fourier d'une fonction non continue? Nous savons que si f est de Dirichlet avec des dérivées généralisées en tout point, alors $S_N(f)(\theta) \rightarrow_{N \rightarrow \infty} f(\theta)$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Illustrons ce fait avec la fonction créneau :

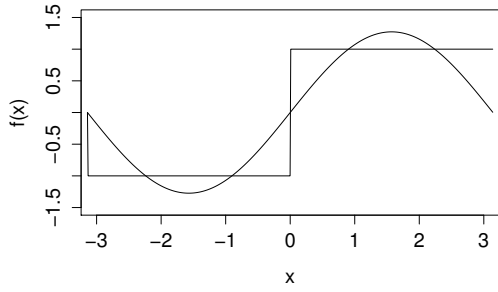
$$f(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \in]0, \pi[, \\ -1 & \text{si } \theta \in]-\pi, 0[, \\ 0 & \text{si } \theta = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

f vérifie bien les hypothèses de Dirichlet et est donc bien somme de sa série de Fourier en tout point de \mathbb{R} . Cependant, des oscillations apparaissent au niveau des discontinuités de la fonction, comme vu sur la Figure 3.5.

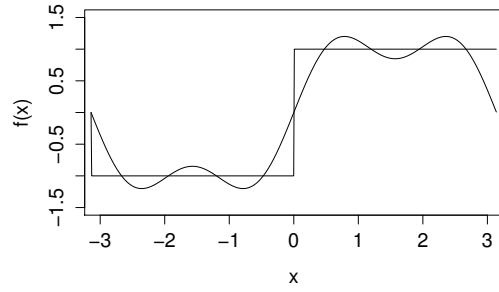
Quantifions ce phénomène plus précisément.

Calculons les coefficients de Fourier de f : comme f est impaire, tous les $a_n(f)$ sont nuls. Par ailleurs, un calcul simple montre que (exercice) $b_{2k}(f) = 0$ et $b_{2k+1}(f) = \frac{4}{\pi(2k+1)}$, pour tout $k \geq 0$. Par conséquent, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

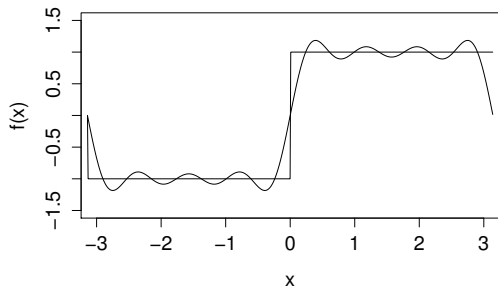
$$S_N(\theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \frac{\sin((2p+1)\theta)}{2p+1}.$$



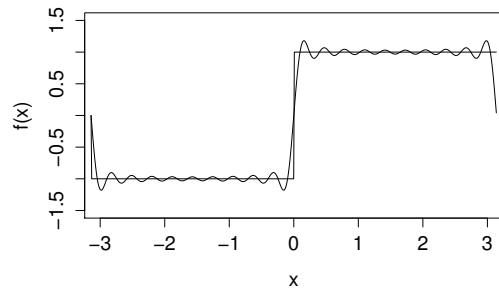
(a) $n = 1$.



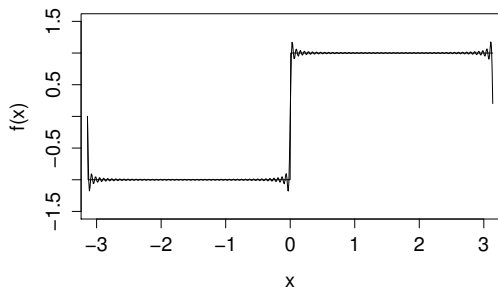
(b) $n = 2$.



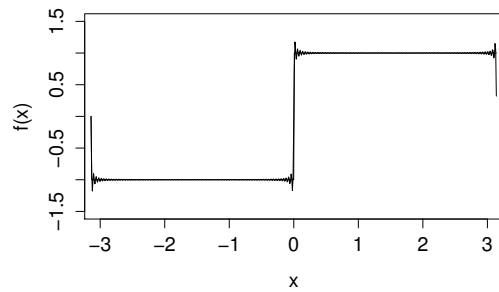
(c) $n = 4$.



(d) $n = 10$.



(e) $n = 50$.



(f) $n = 80$.

FIGURE 3.5 – Phénomène de Gibbs

Comme nous étudions le comportement de $S_N(f)$ pour $N \rightarrow \infty$, on peut étudier sans perte de généralité

$$\tilde{S}_N(\theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\sin((2p+1)\theta)}{2p+1}$$

et le théorème de Dirichlet dit exactement que $\tilde{S}_N(f)(\theta)$ converge vers $f(\theta)$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ (ceci est en particulier évident pour $\theta = 0[\pi]$). Autrement dit, *pour n'importe quel θ fixé*, la différence

$$\Delta_N(\theta) = \tilde{S}_N(f)(\theta) - f(\theta) = \tilde{S}_N(f)(\theta) - 1. \quad (3.17)$$

tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$. Par contre, la convergence *n'est pas uniforme en θ* : en effet, nous allons montrer que

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in]0, \pi[} |\Delta_N(\theta)| \geq c > 0.$$

Ce que dit ce résultat, c'est précisément que ces oscillations ne disparaissent jamais quand $N \rightarrow \infty$: quel que soit N suffisamment grand, on sera toujours capable de trouver un point θ suffisamment proche de la discontinuité tel que les oscillations de la somme partielle de la série de Fourier en ce point par rapport à la vraie valeur $f(\theta)$ sont non triviales.

Pour montrer cela, il suffit d'exhiber une suite (θ_N) qui tend vers 0 et telle que

$$\Delta_N(\theta_N) \rightarrow_{N \rightarrow \infty} c > 0.$$

Nous allons le montrer pour $\theta_N = \frac{\pi}{2N}$: calculons la limite de $\tilde{S}_N(f)\left(\frac{\pi}{2N}\right)$:

$$\tilde{S}_N(f)\left(\frac{\pi}{2N}\right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\sin((2k+1)\pi/(2N))}{(2k+1)\pi/(2N)} \right).$$

On reconnaît là une somme de Riemann qui converge donc vers $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt \geq 1, 17$. Donc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\Delta_N(\theta_N)| = c = 0, 17 > 0.$$

Remarque 3.70. *En fait, on peut être un peu plus précis sur le nombre des oscillations de $S_N f(\theta)$ autour de $f(\theta)$, et ce, qu'on soit arbitrairement proche de la discontinuité : dérivant la différence $\Delta_N(\theta)$, et après simplifications, on montre que*

$$\Delta'_N(f)(\theta) = \frac{2 \sin(2N\theta)}{\pi \sin(\theta)}$$

Le dénominateur est strictement positif sur $]0, \pi[$. Le signe de cette dérivée change entre chaque $]\frac{k\pi}{2N}, \frac{(k+1)\pi}{2N}[$, pour $k = 0, \dots, 2N - 1$. La somme partielle \tilde{S}_N oscille donc autour de 1 avec un nombre d'oscillations proportionnel à N .

3.4 Approximation de la série de Fourier en $L^2(\mathbb{T})$ avec la DFT

Dans tout ce qu'on a fait, un problème intervient dans le cas de la somme partielle de la série de Fourier $S_N(f)$ (voir (A.5)) : pour calculer $S_N(f)$, il faut calculer les $c_n(f)$ est donc connaître une intégrale de f . Ceci revient à connaître la fonction f !

Ici on présente une autre piste, qui donne une approximation sous-optimale de f qui a l'avantage de nécessiter seulement la connaissance d'un nombre fini d'échantillons de f . Cette piste est fondée sur le résultat suivant, qu'on cite sans démonstration.

Lemme 3.71. Soit g_k la fonction construite avec les échantillons de f suivants :

$$g_k \left(\frac{2\pi}{N}n \right) = f \left(\frac{2\pi}{N}n \right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.18)$$

où $N = 2k + 1$ est le cardinal de $\{-k, \dots, 0, \dots, k\}$. Alors :

$$\|f - g_k\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Comme dit avant, on sait que $\left\| f - \sum_{m=-k}^k \hat{f}(m)u_m \right\|$ converge vers 0 plus rapidement que $\|f - g_k\|$ quand $k \rightarrow +\infty$, mais maintenant on va prouver que les coefficients $a(m)$ dans la formule $g_k = \sum_{m=-k}^k a(m)u_m$ peuvent être calculés efficacement grâce à la DFT, ce que n'est pas possible pour $\hat{f}(m)$. En fait, comme pour tout $t \in \mathbb{T}$:

$$g_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-k}^k a(m)e^{imt}$$

alors, en donnant les valeurs $\frac{2\pi}{N}n$ à t on peut exprimer l'équation (3.18) explicitement comme ceci :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-k}^k a(m)e^{im\frac{2\pi}{N}n} = f \left(\frac{2\pi}{N}n \right)$$

qui peut être réécrite dans la forme suivante :

$$\sum_{m=-k}^k a(m)e^{im\frac{2\pi}{N}n} = \sqrt{2\pi} f \left(\frac{2\pi}{N}n \right). \quad (3.19)$$

La côté de gauche de la formule ci-dessus est très similaire à la formule de synthèse, la seule différence étant donnée par le fait que la sommation est $\sum_{m=-k}^k$ au lieu de $\sum_{m=0}^{N-1}$. Néanmoins, on note que le nombre d'indexs discrets entre $-k$ et k est $N = 2k + 1$, exactement le même nombre entre 0 et $N - 1$, donc, grâce au Lemme 2.24, si on démontre que la suite $a(m)e^{im\frac{2\pi}{N}n}$ est N -périodique, alors on peut remplacer l'ensemble de variabilité des indices avec $\{0, 1, \dots, N - 1\}$.

Comme on n'a pas des information a priori relativement à la suite $(a(m))_m$, pour démontrer ce que l'on veut, on va utiliser une voie indirecte : on sait que $f(t)$ est 2π -périodique, et cela implique que la suite $(f(\frac{2\pi}{N}n))_n$ soit N -périodique, en fait :

$$f \left(\frac{2\pi}{N}n \right) = f \left(\frac{2\pi}{N}n + 2\pi \right) = f \left(\frac{2\pi n + 2\pi N}{N} \right) = f \left(\frac{2\pi}{N}(n + N) \right).$$

En plus, on sait que $e^{im\frac{2\pi}{N}n}$ est N -périodique, donc la formule (3.19) peut être vraie si et seulement si $(a(m))_m$ est N -périodique. Alors, comme dit avant, le Lemme 2.24 nous permet

de changer la sommation $\sum_{m=-k}^k$ en $\sum_{m=0}^{N-1}$ et la formule (3.19) devient :

$$\text{IDFT}(Na(m)) = \sqrt{2\pi} f \left(\frac{2\pi}{N}n \right) \implies \text{DFT}(\text{IDFT}(Na(m))) = \sqrt{2\pi} \text{DFT} \left(f \left(\frac{2\pi}{N}n \right) \right),$$

i.e.

$$a(m) = \frac{\sqrt{2\pi}}{N} \text{DFT} \left(f \left(\frac{2\pi}{N} n \right) \right).$$

Si on écrit

$$\tilde{f}(n) = f \left(\frac{2\pi}{N} n \right) \quad \forall n = 0, 1, \dots, N-1,$$

alors :

$$\boxed{a(m) = \frac{\sqrt{2\pi}}{N} \hat{f}(m)} \quad \forall m = 0, 1, \dots, N-1.$$

Si on compare les deux approximations :

$$\left\| f - \sum_{m=-k}^k \frac{2\pi}{N} \hat{f}(m) u_m \right\|_{k \rightarrow +\infty} \rightarrow 0 \quad \text{vs.} \quad \left\| f - \sum_{m=-k}^k \hat{f}(m) u_m \right\|_{k \rightarrow +\infty} \rightarrow 0,$$

on voit que, quand k est grand, i.e. quand le nombre d'échantillons $N = 2k + 1$ est grand, on peut approximer la série de Fourier de f en utilisant de coefficients donnés par la DFT de N échantillons de f .

Si, au lieu de $f \in L^2(\mathbb{T})$, on avait une fonction $f \in L^2[a, b]$, $(b - a)$ -périodique, alors la suite $a(m)$ serait la suivante :

$$a(m) = \frac{b - a}{N\sqrt{2\pi}} e^{-i\frac{2\pi a}{b-a} m} \hat{f}(m).$$

Chapitre 4

La transformée de Fourier pour fonctions non-périodiques

Dans ce dernier chapitre, on considère la transformée de Fourier de fonctions définies sur tout \mathbb{R} à valeurs complexes et non périodiques. L'analyse de Fourier dans ce cas est très riche de résultats mathématiques élégants mais qui dépassent le cadre de ce cours.

On a fait le choix de réduire au minimum le formalisme et de dédier plus de temps aux applications, notamment à la résolution d'équations différentielles.

4.1 Transformée de Fourier et transformée de Fourier inverse pour une fonction de $L^1(\mathbb{R})$

Pour introduire la transformée de Fourier relative à des fonctions non-périodiques on définit les espaces fonctionnels suivants :

$$L^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < +\infty\}$$

$$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ continue sur tout } \mathbb{R} \text{ et } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0\}.$$

$L^1(\mathbb{R})$ est un espace de Banach, i.e. un espace vectoriel normé et complet, par rapport à la norme :

$$\|f\| = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt, \quad f \in L^1(\mathbb{R}),$$

tandis que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est un espace de Banach par rapport à la norme :

$$\|f\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|, \quad f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}).$$

Le théorème suivant (admis) est la généralisation du résultat relatif à la transformée de Fourier discrète et à la transformée de Fourier pour les fonctions périodiques.

Théorème 4.1. *La transformation :*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \hat{f}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\xi t} dt, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

est un opérateur linéaire, continu (par rapport à la topologie engendrée par la norme de $L^1(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$) et injectif, mais non surjectif. Sa transformation inverse est donnée par :

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(t) = \check{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{i\xi t} d\xi,$$

i.e.

$$\check{f}(t) = f(t), \forall t \in \mathbb{R} \text{ et } \hat{\check{f}}(\xi) = f(\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}$$

Définition 4.2. *La transformation $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est dite transformée de Fourier, tandis que la transformation¹ $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R})) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \rightarrow L^1(\mathbb{R})$ est dite anti-transformée de Fourier, ou transformée de Fourier inverse. De plus :*

- le graphe de la fonction $\xi \mapsto |\hat{f}(\xi)|$ est dit le **spectre** (d'amplitude) de f ;
- le graphe de la fonction $\xi \mapsto |\hat{f}(\xi)|^2$ est dit le **spectre de puissance** de f ;
- le graphe de la fonction $\xi \mapsto \text{Arg}(\hat{f}(\xi))$ est dit le **spectre de phase** de f .

Il est possible de définir la transformée de Fourier aussi pour des fonctions de carré intégrable (i.e. dans $L^2(\mathbb{R})$), mais dans ce cas la transformation a une expression limite et la théorie devient plus compliquée.

4.2 Convolution et propriétés de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

La transformée de Fourier a des propriétés remarquables par rapport à plusieurs opérations mathématiques.

Définition 4.3. *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, la convolution entre f et g est la fonction $f * g$ définie par :*

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-x)g(x)dx, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Théorème 4.4. *Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ alors : $f * g \in L^1(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Soient f et g deux fonctions intégrables sur \mathbb{R} . Montrons que $f * g$ est intégrable : il s'agit de montrer que $\int_{\mathbb{R}} |f * g|(x)dx < \infty$. Par définition,

$$\int_{\mathbb{R}} |f * g|(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)| dy dx,$$

1. $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ est l'image de la transformation \mathcal{F} dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

par inégalité triangulaire. La fonction $(x, y) \mapsto |f(x - y)g(y)|$ étant positive, nous pouvons appliquer le théorème de Fubini :

$$\int_{\mathbb{R}} |f * g|(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x - y)g(y)| dx dy = \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(x - y)| dx dy.$$

Or l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |f(x - y)| dx$ ne dépend pas de y , par changement de variables $x' = x - y$ et vaut $\|f\|_{L^1}$. Par conséquent,

$$\int_{\mathbb{R}} |f * g|(x) dx \leq \|f\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < \infty.$$

Donc $f * g$ est bien intégrable. □

Proposition 4.5. *La convolution est commutative : pour tout $f, g \in L^1(\mathbb{R})$,*

$$f * g = g * f \tag{4.1}$$

ou de façon équivalente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - x)g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t - x) dx \tag{4.2}$$

Démonstration. C'est une application immédiate du changement de variables $u = t - x$. □

Remarque 4.6. *La convolution est stationnaire, i.e. commute avec la translation, comme dans le cas discret. En fait, si on fixe $s \in \mathbb{R}$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors on peut définir l'opérateur de translation à droite R_s et l'opérateur de convolution avec g , T_g :*

$$R_s f(t) = f(t - s), \quad T_g f(t) = (f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - x)g(x) dx,$$

alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$R_s T_g f(t) = T_g f(t - s) = \int_{\mathbb{R}} f(t - s - x)g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} R_s f(t - x)g(x) dx = T_g R_s f(t).$$

Exemple 4.7 (Convolution avec une impulsion). *Considérons la « fonction impulsion » suivante :*

$$I_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & 0 < t < \varepsilon \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors, pour $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$(f * I_\varepsilon)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - x)I_\varepsilon(x) dx = \int_0^\varepsilon f(t - x) \frac{1}{\varepsilon} dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f(t - x) dx,$$

ce qui donne, par changement de variable $u = t - x$,

$$(f * I_\varepsilon)(t) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t-\varepsilon} f(u) du = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^t f(u) du.$$

Ainsi, prendre la convolution avec I_ε revient à calculer la moyenne de f sur le petit intervalle de taille ε : $[t - \varepsilon, t]$.

Exemple 4.8. On appelle gaussienne $G_{\mu,\sigma}$ de moyenne μ et écart-type σ la fonction

$$G_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

La convolution de f par $G_{\mu,\sigma}$ est alors donnée par :

$$f * G_{\mu,\sigma}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (4.4)$$

La fonction $G_{\mu,\sigma}$ est une version « lisse » de l'impulsion I_ε , qui a la quasi-totalité de son support dans l'intervalle $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$, donc :

$$\boxed{f * G_{\mu,\sigma} \simeq \text{moyenne locale de } f \text{ en } [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]}.$$

Ainsi, faire la convolution entre un signal et une Gaussienne correspond à un floutage du signal : chaque valeur de f en t est remplacée par une approximation de la moyenne locale des valeurs de f , le paramètre qui gère la localité étant l'écart-type de la Gaussienne.

4.3 Propriétés de la transformée de Fourier

On énonce dans ce paragraphe les propriétés essentielles de la Transformée de Fourier.

4.3.1 Propriétés élémentaires : dilatation, translation

Proposition 4.9 (TF et dilatation). Soit $a \neq 0$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors la transformée de Fourier de l'application $t \mapsto f(at)$ est donnée par $\xi \mapsto \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\xi}{a}\right)$.

Démonstration. Voir Exercice 1, TD5. □

Proposition 4.10 (TF et translation). Soit $b \in \mathbb{R}$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors la transformée de Fourier de l'application $t \mapsto f(t-b)$ est donnée par $\xi \mapsto e^{-i\xi b} \mathcal{F}(f)(\xi)$.

Démonstration. Voir Exercice 1, TD5. □

On observe des comportements semblables au cas de la Transformée de Fourier Discrète : en particulier, \mathcal{F} , comme la DFT, transforme la translation de la variable initiale en le produit par une exponentielle complexe. On peut démontrer aussi d'une manière très simple une propriété que l'on a déjà vue pour la DFT, i.e. que

$$\boxed{\hat{f}(t) = f(-t)}$$

On va prouver ce résultat en utilisant la définition de \hat{f} :

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{-i\xi t} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi(-t)} d\xi = \check{f}(-t) = f(-t).$$

Un corollaire immédiat de cette propriété est que la puissance quatrième de la transformée de Fourier est l'opérateur identité.

4.3.2 Transformée de Fourier et convolution

Le résultat fondamental est le suivant

Proposition 4.11 (TF et convolution). *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors*

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f)(\xi) \mathcal{F}(g)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (4.5)$$

Démonstration. Soient f et g intégrables. Alors $f * g$ est intégrable d'après la question précédente, donc $\widehat{f * g}$ a bien un sens. Mais alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{f * g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f * g(y) e^{-i\xi y} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y-z) g(z) dz e^{-i\xi y} dy$$

Par application du théorème de Fubini à la fonction $(y, z) \mapsto f(y-z)g(z)e^{-i\xi y}$ intégrable, il vient

$$\widehat{f * g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y-z) g(z) e^{-i\xi y} dy dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{-i\xi z} \int_{-\infty}^{\infty} f(y-z) e^{-i\xi(y-z)} dy dz$$

L'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(y-z) e^{-i\xi(y-z)} dy$ ne dépend pas de y (par changement de variables $y' = y - z$ et vaut $\sqrt{2\pi} \hat{f}(\xi)$). Par conséquent,

$$\widehat{f * g}(\xi) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{-i\xi z} dz = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi). \quad \square$$

Ce résultat est à comparer avec le résultat très semblable à celui vu dans le cas de la transformée de Fourier discrète : \mathcal{F} , comme la DFT, transforme la convolution en le produit ponctuel des transformées de Fourier (avec un facteur de normalisation donné par $\sqrt{2\pi}$).

Remarque 4.12. *Si on applique \mathcal{F} à $\mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g)$ (pour toutes fonctions f et g pour lesquelles cette expression a un sens), il vient :*

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g))(\xi) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f))(\xi) \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(g))(\xi) = \sqrt{2\pi} f(\xi) g(\xi).$$

Si maintenant on applique la transformée de Fourier inverse aux deux côtés de l'équation précédente on obtient :

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}(fg)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g))(t)}. \quad (4.6)$$

Comme on le verra, cette formule est très importante dans la technique de résolution des équations différentielles via transformée de Fourier.

4.3.3 Transformée de Fourier et dérivation

Proposition 4.13 (TF et dérivation). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, dérivable tel que $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Alors*

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = i\xi \mathcal{F}(f)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (4.7)$$

Démonstration. Voir Exercice 1, TD5. □

Remarque 4.14. *Attention ! Ce n'est pas parce que f est intégrable que f admet nécessairement une limite nulle en $\pm\infty$! Contre-exemple : prendre une fonction positive, nulle partout sauf autour des entiers naturels, autour desquels on met un triangle dont l'aire diminue de sorte que la somme des aires soit sommable. Cette fonction est intégrable, mais ne tend pas vers 0 pour $t \rightarrow \infty$.*

Ainsi, une dérivation dans l'espace réel devient une multiplication par $(i\xi)$ dans l'espace de Fourier. Une récurrence immédiate donne le résultat plus général

Proposition 4.15 (TF et dérivation). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, n -fois dérivable tel que $f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors*

$$\mathcal{F}(f^{(n)})(\xi) = (i\xi)^n \mathcal{F}(f)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (4.8)$$

4.3.4 TF et gaussienne

La gaussienne joue un rôle important vis-à-vis de la Transformée de Fourier, que nous explicitons ici :

Proposition 4.16. *La Transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est la fonction $\xi \mapsto e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.*

Autrement dit, la Transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne : plus précisément, la fonction $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est vecteur propre de \mathcal{F} , pour la valeur propre 1. Plus généralement, la propriété de dilatation vue plus haut donne immédiatement que

Proposition 4.17. *Soit $c \in \mathbb{R}$. La Transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto e^{-c^2 t^2}$ est la fonction $\xi \mapsto \frac{1}{c\sqrt{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4c^2}}$.*

On aura besoin des lemmes suivants :

Lemme 4.18. *On a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}.$$

Démonstration. Voir Exercice 2, TD5.

Lemme 4.19. *On a :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t+iw)^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Démonstration. Admis. La preuve utilise un théorème d'analyse complexe dû à Cauchy (Paris, 1789 – Sceaux, 1857). □

Maintenant on peut démontrer la Proposition 4.16 :

Démonstration de la Proposition 4.16. Voir Exercice 2, TD5. □

4.3.5 Tableau récapitulatif

On résume ici les propriétés les plus importantes de la transformée de Fourier. Attention : tous ces résultats nécessitent des hypothèses adéquates de régularité et d'intégrabilité des fonctions f et g . Pour les résultats précis, on renvoie aux paragraphes précédents. Ici, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

	Fonction	Transformée de Fourier
(1)	$t \mapsto f(at)$	$\xi \mapsto \frac{1}{ a } \mathcal{F}(f) \left(\frac{\xi}{a} \right)$
(2)	$t \mapsto f(t - b)$	$\xi \mapsto e^{-i\xi b} \mathcal{F}(f)(\xi)$
(3)	$t \mapsto e^{ict} f(t)$	$\xi \mapsto \mathcal{F}(f)(\xi - c)$
(4)	$t \mapsto (f * g)(t)$	$\xi \mapsto \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f)(\xi) \mathcal{F}(g)(\xi)$
(5)	$t \mapsto f'(t)$	$\xi \mapsto i\xi \mathcal{F}(f)(\xi)$
(6)	$t \mapsto f''(t)$	$\xi \mapsto -\xi^2 \mathcal{F}(f)(\xi)$
(7)	$t \mapsto f^{(n)}(t)$	$\xi \mapsto (i\xi)^n \mathcal{F}(f)(\xi)$
(8)	$t \mapsto (-it)^n f(t)$	$\xi \mapsto \frac{d^n}{d\xi^n} \mathcal{F}(f)(\xi)$
(9)	$t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$	$\xi \mapsto e^{-\frac{\xi^2}{2}}$
(10)	$t \mapsto e^{-c^2 t^2}$	$\xi \mapsto \frac{1}{c\sqrt{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4c^2}}$

4.3.6 La localisation des signaux et son effet sur le spectre

Imaginons être intéressés par le spectre d'un signal $f(t)$, uniquement dans le voisinage d'une valeur de t_0 . Par une translation, on peut toujours supposer que $t_0 = 0$. L'idée la plus simple pour localiser l'analyse du spectre de $f(t)$ consiste en le « tronquer », i.e. le multiplier par la fonction créneau de taille $2T$

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq T \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$$

où $2T$ est la taille du voisinage d'intérêt. Comme on le sait, la transformée de Fourier du signal tronqué $\tilde{f}(t) = f(t)\chi(t)$ est $\hat{\tilde{f}}(\xi) = \hat{f}(\xi) * \hat{\chi}(\xi)$. Dans les TD on verra que :

$$\hat{\chi}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T \frac{\sin(\xi T)}{\xi T}.$$

Ainsi, **le spectre du signal tronqué est la convolution entre le spectre du signal initial et le sinus cardinal** de ωT , où le sinus cardinal est défini comme la fonction suivante : $\mathbb{R} \ni t \mapsto \text{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t}$. Cela montre que la localisation de l'analyse en fréquence d'un signal n'est pas un sujet simple. Comme déjà dit, la théorie des ondelettes, développée surtout à la fin des années 1980, donne un outil très puissant pour résoudre ce problème.

4.4 Le théorème d'échantillonnage de Shannon, Nyquist et Whittaker

4.4.1 Notion d'échantillonnage

La reconstruction d'une fonction à partir d'un ensemble discret d'échantillons est possible quand une fonction f a un spectre borné, comme précisé dans la définition suivante.

Définition 4.20. On dit que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est un **signal continu à bande limitée** s'il existe $\Omega \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\hat{f}(\xi) = 0 \quad \forall |\xi| > \Omega.$$

Le concept de signal à bande limitée est de grande importance dans les applications, en fait, même si f n'est pas à bande limitée, les senseurs humains le sont toujours ! Par exemple, le système visuel humain n'est pas capable de percevoir les fréquences d'une onde électromagnétique comme la lumière quand la fréquence d'oscillation est inférieure à 400 THz et supérieure de 800 THz, T=« Tera=10¹² ». Le système auditif humain peut percevoir les sons, quand elles ont une fréquence entre 20Hz et 20KHz, K=« Kilo=10³ ».

Le résultat suivant montre comment un signal *continu* à bande limitée peut être reconstruit à partir de la connaissance d'une suite d'*échantillons discrets*.

Théorème 4.21 (Théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist-Whittaker²). Soient :

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ un signal à bande limitée : $\exists \Omega \in \mathbb{R}^+$ tel que $\hat{f}(\xi) = 0 \quad \forall |\xi| > \Omega$.
- $\hat{f} : \text{continue et } \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \text{ par morceaux.}$

Alors, f est complètement déterminée par ses échantillons dans les points $t_n = \frac{\pi}{\Omega}n$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{\pi}{\Omega}n\right) \frac{\sin(\Omega t - \pi n)}{\Omega t - \pi n}, \quad (4.9)$$

et la convergence de la série est uniforme.

Il y a plusieurs preuves du théorème d'échantillonnage, notamment une qui utilise la formule de sommation de Poisson (Pithiviers, 1781 – Paris, 1840), ici on propose une preuve alternative à la méthode de Poisson (Bogges-Narkovich : « A first course in wavelet with Fourier analysis », page 118, Prentice Hall).

Démonstration. On va utiliser la série et la transformée de Fourier de \hat{f} . Pour cela, on doit interpréter \hat{f} comme une fonction 2Ω -périodique et comme une fonction à support limité en $[-\Omega, \Omega]$ quand on calcule sa transformée de Fourier. Donc, on assimile f à son extension en copies périodiques. Grâce aux hypothèses, $\hat{f} \in L^2[-\Omega, \Omega]$ et donc on peut développer \hat{f} en série de Fourier :

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{i \frac{2\pi \xi k}{2\Omega}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{i \frac{\pi \xi k}{\Omega}}, \quad (4.10)$$

2. Shannon (Petoskey, 1916 – Medford, 2001), Nyquist (Stora Kil, 1889 – Harlingen, 1976), Whittaker (Southport, 1873 – Edinburgh, 1956)

avec :

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\xi) e^{-i\frac{\pi\xi k}{\Omega}} d\xi \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{f}(\xi)=0 \forall |\xi|>\Omega} \hat{f}(\xi) e^{i(\frac{-\pi}{\Omega}k)\xi} d\xi \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega} \check{f}\left(-\frac{\pi}{\Omega}k\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega} f\left(-\frac{\pi}{\Omega}k\right),
\end{aligned}$$

où dans la dernière étape on a utilisé la définition d'anti-transformée de Fourier de \hat{f} , i.e. f , calculée en $-\frac{\pi}{\Omega}k$ et on a inclut en c_k le facteur de normalisation de la série. Donc on peut réécrire la série de Fourier (4.10) comme ceci :

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega} f\left(-\frac{\pi}{\Omega}k\right) e^{i\frac{\pi\xi k}{\Omega}} \stackrel{(n=-k \Leftrightarrow k=-n)}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega} f\left(\frac{\pi}{\Omega}n\right) e^{-i\frac{\pi\xi n}{\Omega}},$$

et cette série *converge uniformément* car \hat{f} est continue et \mathcal{C}^1 par morceaux. On calcule $f(t)$ via la transformée de Fourier inverse de $\hat{f}(\xi)$:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{f}(\xi)=0 \forall |\xi|>\Omega} \hat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega}^{\Omega} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega} f\left(\frac{\pi}{\Omega}n\right) e^{-i\frac{\pi\xi n}{\Omega}} e^{i\xi t} d\xi \quad (4.11) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\Omega} f\left(\frac{\pi}{\Omega}n\right) \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\xi \frac{t\Omega - \pi n}{\Omega}} d\xi,
\end{aligned}$$

où, dans la dernière étape, on a pu échanger la série et l'intégrale grâce au fait que la série converge uniformément. On s'intéresse maintenant à l'intégrale :

$$\int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\xi \frac{t\Omega - \pi n}{\Omega}} d\xi = \int_{-\Omega}^{\Omega} \cos\left(\xi \frac{t\Omega - \pi n}{\Omega}\right) d\xi + i \int_{-\Omega}^{\Omega} \sin\left(\xi \frac{t\Omega - \pi n}{\Omega}\right) d\xi,$$

la deuxième intégrale est nulle car la fonction sinus est impaire et le domaine d'intégration est symétrique, par contre la fonction cosinus est paire et donc on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\xi \left(\frac{t\Omega - \pi n}{\Omega}\right)} d\omega &= 2 \int_0^{\Omega} \cos\left(\frac{t\Omega - \pi n}{\Omega}\right) d\xi = 2 \left[\frac{\sin\left(\xi \frac{t\Omega - \pi n}{\Omega}\right)}{\frac{t\Omega - \pi n}{\Omega}} \right]_0^{\Omega} \\
&= 2\Omega \frac{\sin\left(\Omega \frac{t\Omega - \pi n}{\Omega}\right)}{t\Omega - \pi n} - 0 = 2\Omega \frac{\sin(t\Omega - \pi n)}{t\Omega - \pi n}.
\end{aligned}$$

En introduisant ce résultat dans l'expression de $f(t)$ en (4.11), on obtient :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{2\Omega}{2\Omega} f\left(\frac{\pi}{\Omega}n\right) \frac{\sin(t\Omega - \pi n)}{t\Omega - \pi n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{\pi}{\Omega}n\right) \frac{\sin(t\Omega - \pi n)}{t\Omega - \pi n},$$

et, comme déjà souligné, la convergence de la série est uniforme. \square

4.4.2 La fréquence de Nyquist : « aliasing » et « oversampling »

On utilisant la définition du sinus cardinal, on peut réécrire la formule du théorème comme ceci :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{\pi}{\Omega}n\right) \operatorname{sinc}(t\Omega - \pi n),$$

ce qui caractérise univoquement f est la suite d'échantillons $f\left(\frac{\pi}{\Omega}n\right)$. On observe que la période d'échantillonnage des valeurs de f qui apparaît dans la formule du théorème est : $T = \frac{\pi}{\Omega}$, donc la fréquence d'échantillonnage de la formule du théorème, dite **fréquence de Nyquist** et écrite comme ν_N , est $\nu_N = \frac{1}{T} = \frac{\Omega}{\pi}$.

On veut maintenant comparer la fréquence de Nyquist avec la fréquence maximale du signal f : on rappelle qu'on est parti de l'hypothèse que f est un signal à bande limitée avec pulsation maximale Ω , alors la fréquence maximale ν_{\max} de f est définie par la relation $\Omega = 2\pi\nu_{\max}$, i.e. $\nu_{\max} = \frac{\Omega}{2\pi}$. Si on compare la fréquence d'échantillonnage de Nyquist ν_N avec la fréquence maximale ν_{\max} du signal f on obtient : $\nu_N = 2\nu_{\max}$, i.e. **le théorème d'échantillonnage vaut si et seulement si la fréquence d'échantillonnage est (minimum) deux fois la fréquence maximale du signal f !**

Si on échantillonne avec une fréquence inférieure à la fréquence de Nyquist, alors on obtient un phénomène connu avec le nom d'**aliasing**, qui correspond à des erreurs dans la reconstruction du signal. Les erreurs sont dues au fait que, comme on l'a vu dans la preuve, on doit considérer une extension périodique du spectre de f , la fréquence de Nyquist ν_N est la fréquence (minimale) correcte pour pouvoir reconstruire f et pour éviter que de « déborder » dans une période adjacente du spectre ! Une fréquence d'échantillonnage inférieure introduit des informations parasites qui viennent des périodes spectres adjacents à gauche et à droite.

Pour terminer, on observe que le terme général de la série du théorème converge vers 0 comme $\frac{1}{n}$ quand $n \rightarrow +\infty$, qui est une convergence plutôt lente. Pour augmenter la vitesse de convergence, par exemple à $\frac{1}{n^2}$ on peut augmenter la fréquence d'échantillonnage avec une technique connue comme sur-échantillonnage (**oversampling**).

4.5 Application de la transformée de Fourier à la résolution d'équations différentielles en dérivées ordinaires et partielles

La relation entre Transformée de Fourier et dérivation permet d'obtenir de techniques très efficaces pour résoudre certains types d'équations différentielles.

4.5.1 Un exemple de EDO résolue avec la transformée de Fourier

Pour comprendre l'idée générale, on commence avec un exemple donné par une équation différentielle ordinaire (EDO). Soient $y, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y, g \in L^1(\mathbb{R})$, y deux fois différentiable, on considère l'EDO suivante :

$$y''(t) - y(t) = -g(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si on applique la transformée de Fourier aux deux côtés, grâce à sa linéarité on peut écrire :

$$\widehat{y}''(\xi) - \widehat{y}(\xi) = -\widehat{g}(\xi),$$

i.e.

$$-\xi^2 \hat{y}(\xi) - \hat{y}(\xi) = -\hat{g}(\xi) \iff (1 + \xi^2) \hat{y}(\xi) = \hat{g}(\xi), \xi \in \mathbb{R}$$

i.e.

$$\hat{y}(\xi) = \frac{1}{1 + \xi^2} \cdot \hat{g}(\xi) \quad (\text{Solution dans le domaine fréquentiel}).$$

Grâce aux propriétés de la transformée de Fourier, on a transformé l'EDO en une équation algébrique dans le domaine fréquentiel! Si on connaît la transformée de Fourier de g , alors on a résolu l'EDO dans l'espace de Fourier.

Néanmoins, l'EDO initiale a été formulée par rapport à la variable t , donc il faut revenir à la représentation originale en appliquant la transformée de Fourier inverse aux deux côtés de la dernière équation en utilisant la propriété (4.6) :

$$(\hat{y}(\xi))^\vee(t) = y(t) = \left[\frac{1}{1 + \xi^2} \cdot \hat{g}(\xi) \right]^\vee(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left(\frac{1}{1 + \xi^2} \right)^\vee(t) * g(t) \right). \quad (4.12)$$

En TD, nous avons vu que :

$$\widehat{e^{-a|t|}}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \xi^2},$$

donc, si on considère $a = 1$:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \widehat{e^{-|t|}}(\xi) = \frac{1}{1 + \xi^2},$$

et alors :

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|t|} * g(t),$$

i.e.

$$y(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-s|} g(s) ds = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-s) e^{-|s|} ds.$$

Si on sait calculer l'intégrale (ceci dépend de l'expression analytique de g), alors on peut déterminer explicitement $y(t)$, sinon on peut en tout cas approximer sa valeur.

Les étapes de la résolution d'une EDO via la transformée de Fourier sont donc :

1. Transformer l'EDO dans l'espace fréquentiel en appliquant la transformée de Fourier aux deux côtés de l'équation ;
2. Résoudre l'EDO algébrique dans l'espace de Fourier ;
3. Appliquer la transformée de Fourier inverse pour obtenir la solution de l'EDO dans la représentation originale ;
4. Typiquement, la solution dans l'espace de Fourier est donné par un produit, alors la solution dans la représentation originale est écrite avec une convolution.

Pour pouvoir utiliser cette technique, les coefficients des dérivées doivent être constantes et les fonctions doivent être intégrables.

4.5.2 Transformée de Fourier et EDPs

La technique de la transformée de Fourier est encore plus efficace quand on l'applique aux EDPs : équations différentielles en dérivées partielles. Pour fixer les idées, on considère seulement des fonctions du type suivant : $u = u(t, x)$ ou $u = u(t, x, y, z)$, où t est la coordonnée temporelle et x ou (x, y, z) sont les coordonnées spatiales 1D et 3D, respectivement. On suppose toujours implicitement que $u \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ou $u \in L^1(\mathbb{R}^4)$, respectivement, et, bien sûr, que u soit dérivable un nombre suffisant de fois pour pouvoir écrire l'EDP correspondante.

Pour simplifier la notation, on écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_t, \dots$$

Les propriétés de la transformée de Fourier par rapport aux dérivées partielles sont les suivantes :

- Si la variable d'intégration de la transformée de Fourier est x , alors

$$\widehat{u_x}(t, \xi) = i\xi \widehat{u}(t, \xi), \quad \widehat{u_{xx}}(t, \xi) = -\xi^2 \widehat{u}(t, \xi),$$

$$\widehat{u_t}(t, \xi) = \frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(t, \xi), \quad \widehat{u_{tt}}(t, \xi) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \widehat{u}(t, \xi),$$

les premières deux formules sont attendues, pour obtenir les deux autres il faut observer que, comme $u \in L^1(\mathbb{R}^2)$, alors on peut échanger l'ordre de dérivation et d'intégration :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} e^{-i\xi x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) e^{-i\xi x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(t, \xi),$$

et de même pour u_{tt} .

- Ces considérations peuvent être étendues à $u(t, x, y, z)$.

4.5.3 Un exemple physique : l'équation de la chaleur

On considère le problème de Cauchy pour $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ défini par :

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} & \forall x \in (-\infty, +\infty), \forall t \in (0, +\infty), \alpha \in \mathbb{R}^+ \\ u(0, x) = \varphi(x) & \forall x \in (-\infty, +\infty), t = 0 \end{cases}$$

Prenons un instant pour donner l'intuition physique de cette équation :

- $u(t, x)$ représente la température d'une barre 1D à l'instant t au point d'abscisse x ;
- $u_t(t, x)$ est la vitesse de changement de la température à l'instant t au point x ;
- $u_{xx}(t, x)$: concavité du profil de température à l'instant t et dans le point x (la dérivée seconde est par rapport à la variable spatiale, donc ça serait incorrect d'interpréter u_{xx} comme une accélération) ;
- $\varphi(x)$: concavité initiale du profil de température dans le point x .

De façon informelle, l'origine de cette équation vient du bilan d'énergie suivant : si on écrit la dérivée seconde discrète (avec un pas Δx) par rapport à x , on peut comprendre qu'elle définit la comparaison entre la température en x à l'instant t et celle de ces voisins au même instant, en fait :

$$\begin{aligned} u_{xx}(t, x) &\simeq \frac{u(t, x + \Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \\ &= \frac{2}{(\Delta x)^2} \left[\underbrace{\frac{u(t, x + \Delta x) + u(t, x - \Delta x)}{2}}_{\text{température moyenne voisins}} - u(t, x) \right] \end{aligned}$$

Donc, l'équation $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ dit que :

- si $u(t, x)$ est inférieure à la température moyenne des voisins, alors $u_{xx} > 0$ et donc $u_t(t, x) (= \alpha^2 u_{xx}) > 0$ et cela signifie que la température en x augmente dans le temps : les voisins cèdent un peu de leur chaleur à x pour arriver à l'équilibre thermique ;
- dans le cas contraire, $u_t(t, x) (= \alpha^2 u_{xx}) < 0$ et la température en x baisse dans le temps : x cède un peu de sa chaleur aux voisins pour arriver à l'équilibre thermique.
- La constante positive α^2 est une caractéristique du matériel dite « coefficient de diffusion thermique », plus α^2 est grand, plus rapidement la barre arrive à l'équilibre thermique.

L'équation de la chaleur est utilisée dans beaucoup d'autres domaines, par exemple en traitement d'images pour lisser les imperfections ou en probabilité pour modéliser le comportement moyen d'un processus de diffusion.

4.5.4 Résolution de l'équation de la chaleur par la Transformée de Fourier

Pour résoudre l'équation de la chaleur, on calcule la transformée de Fourier (en intégrant par rapport à la variable x) des deux côtés :

$$u_t(t, x) = \alpha^2 u_{xx}(t, x) \quad \xrightarrow{\hat{\cdot}} \quad \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(t, \xi) = -\alpha^2 \xi^2 \hat{u}(t, \xi).$$

La condition initiale dans l'espace de Fourier devient : $\hat{u}(0, \xi) = \hat{\varphi}(\xi)$. On a donc transformé l'EDP (en t et en x) en une EDO (selon t , pour ξ fixé) :

$$\begin{cases} u_t(t, x) = \alpha u_{xx}(t, x) \\ u(0, x) = \varphi(x) \end{cases} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(t, \xi) = -\alpha^2 \xi^2 \hat{u}(t, \xi) \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{\varphi}(\xi), \end{cases}$$

Insistons un peu : dans l'EDO de droite, ξ est une constante. Ainsi, il s'agit d'une équation linéaire d'ordre 1 à coefficient constant (par rapport à la variable t).

On rappelle que la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = -ky \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

est : $y(t) = y_0 e^{-kt}$ et donc, dans notre cas :

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{\varphi}(\xi) \cdot e^{-\alpha^2 \xi^2 t} = \hat{\varphi}(\xi) \cdot e^{-(\alpha^2 t) \xi^2} \quad (\text{Solution dans l'espace de Fourier}).$$

On doit maintenant appliquer la transformée de Fourier inverse pour revenir à la solution originelle. Grâce à l'éq. (4.6) on obtient :

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \left(\widehat{\varphi}(\xi) \cdot e^{-(\alpha^2 t)\xi^2} \right)^\vee (t, x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \check{\varphi}(x) * \left(e^{-(\alpha^2 t)\xi^2} \right)^\vee (t, x), \end{aligned}$$

mais $\check{\varphi}(x) = \varphi(x)$ et $e^{-(\alpha^2 t)\omega^2}$ est une Gaussienne par rapport à ξ , donc on peut utiliser la propriété :

$$\widehat{e^{-c^2 x^2}}(\xi) = \frac{1}{c\sqrt{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4c^2}} \iff c\sqrt{2} \widehat{e^{-c^2 x^2}}(\xi) = e^{-\frac{1}{4c^2} \xi^2},$$

qui dans notre cas donne : $\frac{1}{4c^2} = \alpha^2 t$, or $c^2 = \frac{1}{4\alpha^2 t}$ et alors $c = \frac{1}{2\alpha\sqrt{t}}$ (physiquement, ça a du sens de considérer seulement la détermination positive de la racine, car la détermination négative change du signe à la température). On peut finalement écrire :

$$\left(e^{-(\alpha^2 t)\xi^2} \right)^\vee (t, x) = \frac{\sqrt{2}}{2\alpha\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}} = \frac{1}{\alpha\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}}$$

et donc la solution de l'EDP de propagation de la chaleur est :

$$u(t, x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha^2 t}} \varphi(y) dy.$$

Pour certaines expressions de $\varphi(x)$ on peut intégrer exactement et obtenir une expression analytique pour $u(t, x)$, plus en général, on peut seulement approximer $u(t, x)$.

Il est intéressant d'observer que, comme l'expression standard d'une Gaussienne est :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

l'écart-type est ici $\sigma = \alpha\sqrt{2t}$ et donc la variance $\sigma^2 = 2\alpha^2 t$: la variance de la gaussienne qui apparaît dans la solution de l'EDP de la propagation de la chaleur n'est pas fixe, mais augmente linéairement avec le temps t . Cela veut dire que la variance de la gaussienne devient de plus en plus large au fur et à mesure que le temps avance, ce que est parfaitement cohérent avec le fait que, quand $t \rightarrow +\infty$, la barre arrive à l'équilibre thermique, et donc la température est uniforme partout.

Ce que l'on vient de démontrer nous permet de comprendre encore plus en profondeur la technique classique de convolution avec une gaussienne en traitement de signaux, qu'on a vu, par exemple, dans l'opération de floutage d'une image numérique. En fait, si on identifie $\varphi(y)$ avec l'intensité originale d'un pixel quelconque y dans une image numérique, et $u(t, x)$ avec l'intensité de l'image floutée à l'instant t , dans un pixel fixé de position x , on peut interpréter la convolution d'une image avec une gaussienne comme une étape du processus d'échange d'intensité entre x et ses voisins, où cet échange qui suit la même loi de la propagation de la chaleur. De plus, comme la propagation de la chaleur est un *processus irréversible*, on ne peut pas penser de pouvoir inverser de manière simple l'effet de floutage obtenu par convolution avec une gaussienne. Une dernière observation relative à la dimension spatiale du problème : l'application de la technique que l'on vient de voir nécessite que x varie entre $-\infty$ et $+\infty$ ce qui ne convient pas au cas où x vit dans un ensemble borné. Pour résoudre ce dernier cas, il faut utiliser d'autres techniques : la transformée de Fourier sinus et cosinus et la transformée de Laplace.

Annexe A

Pense-bête sur la convergence L^2 des séries de Fourier

Décomposer une fonction 2π -périodique en série de Fourier, c'est écrire f comme somme

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)), \quad (\text{A.1})$$

où les coefficients $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ sont des coefficients à déterminer en fonction de f .

Définition A.1 (Fonctions de carré intégrable). *On définit*

$$L_p^2(0, 2\pi) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f, 2\pi\text{-périodique}, \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta < +\infty\} \quad (\text{A.2})$$

comme l'ensemble des fonctions 2π -périodiques suffisamment régulières dont la restriction à $[0, 2\pi]$ est de carré intégrable. On peut munir $L_p^2(0, 2\pi)$ d'un produit scalaire complexe et d'une norme respectivement définies par, pour $f, g \in L_p^2(0, 2\pi)$,

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \bar{g}(\theta) d\theta \in \mathbb{C}, \quad (\text{A.3})$$

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.4})$$

Définition A.2. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit*

$$e_n : \theta \mapsto e_n(\theta) = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Définition A.3. *Soit $f \in L_p^2(0, 2\pi)$,*

— *on appelle coefficients de Fourier trigonométriques de f , la suite $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \langle f, e_n \rangle.$$

— on appelle coefficients de Fourier circulaires la donnée des deux suites $(a_n(f))_{n \geq 0}$ et $(b_n(f))_{n \geq 0}$ définies par, pour tout $n \geq 0$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta,$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta.$$

Proposition A.4 (Relation entre coefficients). 1. Pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{cases} a_n(f) &= c_n(f) + c_{-n}(f), \\ b_n(f) &= i(c_n(f) - c_{-n}(f)). \end{cases}$$

2. Pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{cases} c_n(f) &= \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}, \\ c_{-n}(f) &= \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}. \end{cases}$$

3. Si f est à valeurs réelles, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$$

et les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont réels.

4. Si f est paire, $b_n(f) = 0$, pour tout $n \geq 0$,

5. Si f est impaire, $a_n(f) = 0$, pour tout $n \geq 0$.

Proposition A.5 (Lemme de Riemann-Lebesgue). Si f est 2π -périodique et continue par morceaux, alors $c_n(f) \rightarrow 0$, quand $|n| \rightarrow \infty$. Pour tout $k \geq 1$, si f est de classe \mathcal{C}^{k-1} et \mathcal{C}^k par morceaux, alors

$$c_n(f) = \frac{1}{(in)^k} c_n(f^{(k)}) = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \text{ pour } |n| \rightarrow \infty.$$

Définition A.6 (Série de Fourier). Soit $f \in L^2_p(0, 2\pi)$ et $N \geq 1$. On définit la fonction $\theta \mapsto S_N(f)(\theta)$ définie par : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$S_N(f)(\theta) := \sum_{k=-N}^N c_k(f) e^{ik\theta}. \quad (\text{A.5})$$

Pour tout $N \geq 1$, $S_N(f)$ est une fonction 2π -périodique, de classe \mathcal{C}^∞ . Dans le cas où pour un certain θ , $S_N(f)(\theta)$ converge, on appelle somme de la série de Fourier la limite de $S_N(f)$, notée $S(f)$, c'est à dire

$$S(f)(\theta) := \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ik\theta}.$$

Pour tout $N \geq 1$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$S_N(f)(\theta) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k(f) \cos(k\theta) + b_k(f) \sin(k\theta)).$$

Définition A.7. On appelle polynôme trigonométrique de degré plus petit que $N \geq 0$ toute fonction p du type : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$p(\theta) = \sum_{k=-N}^N \alpha_k e^{ik\theta} = \sum_{k=-N}^N \alpha_k e_k(\theta),$$

où $\alpha_k \in \mathbb{C}$ pour tout $-N \leq k \leq N$. On note \mathcal{P}_N l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré plus petit que N . \mathcal{P}_N est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions 2π -périodiques de dimension $2N + 1$.

Théorème A.8. Soit $N \geq 1$ et soit p un polynôme trigonométrique dans \mathcal{P}_N . Alors

$$\|f - S_N(f)\|_2^2 \leq \|f - p\|_2^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - S_N(f)(\theta)|^2 d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - p(\theta)|^2 d\theta.$$

Théorème A.9 (Inégalité de Bessel). Pour tout $f \in L_p^2(0, 2\pi)$, pour tout $N \geq 1$,

$$\|S_N(f)\|_2^2 = \sum_{k=-N}^N |c_k(f)|^2 \leq \|f\|_2^2,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=-N}^N |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta$$

Théorème A.10 (Théorème de Parseval). Si $f \in L_p^2(0, 2\pi)$, la série de Fourier de f converge vers f en moyenne quadratique, c'est à dire que

$$\|f - S_N(f)\|_2^2 \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - S_N(f)(\theta)|^2 d\theta \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0.$$

De plus, la série de terme général $|c_k(f)|^2$ est convergente et on a l'égalité

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2.$$

Cette dernière égalité s'appelle l'égalité de Parseval.

Proposition A.11 (Égalité de Parseval en terme des coefficients de Fourier circulaires). Soit $f \in L_p^2(0, 2\pi)$, alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$$