Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 3ème année, Transformée de Fourier et Applications 2022-2023

Seconde Session du 26/06/2023

Durée 1h30. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.

Total : 25.75 = 5 + 9 + 11.75

Exercice 1 (5pt)

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

a) Rappeler la définition du produit scalaire sur ℓ_N.

b) Quelle propriété satisfait la famille $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_0, \ldots, \mathcal{E}_{N-1})$ des exponentielles complexes ? Calculer pour tout $n \in \{0, \ldots, N-1\}$, $\|\mathcal{E}_n\|_2^2$.

c) Montrer, grâce au résultat de la précédente question, que pour tous $z, w \in \ell_N$, $\langle z, w\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\langle z, \mathcal{E}_n\rangle \overline{\langle w, \mathcal{E}_n\rangle}}{N}$.

d) Donner la définition des opérateurs DFT et IDFT sur ℓ_N.

2. Rappeler la définition de la transformée de Fourier et montrer la propriété de dilatation.

Correction.
Total : 5 = (0.5 + 0.75 + 2 + 0.5) + 1.25.

1. a) On a pour tout $z, w \in \ell_N$, $\langle z, w\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} z(n)\overline{w(n)}$ (0.5pt).

b) $\mathcal{E}$ est une famille orthogonale de ℓ_N. On a pour tout $n \in \{0, \ldots, N-1\}$, $\|\mathcal{E}_n\|_2^2 = \langle \mathcal{E}_n, \mathcal{E}_n\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{n}{N}} e^{-2i\pi \frac{n}{N}} = N$ (0.75pt).

c) Comme $\mathcal{E}$ est une famille orthogonale et pour tout $n \in \{0, \ldots, N-1\}$, $\|\mathcal{E}_n\|_2^2 = N$, on a d'après la formule de décomposition que pour tout $z, w \in \ell_N$

$$z = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\langle z, \mathcal{E}_n\rangle}{N}\mathcal{E}_n \quad \text{et} \quad w = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\langle w, \mathcal{E}_m\rangle}{N}\mathcal{E}_m. \ (0.75pt)$$

D'où

$$\langle z, w\rangle = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} \frac{\langle z, \mathcal{E}_n\rangle \overline{\langle w, \mathcal{E}_m\rangle}}{N^2} \langle \mathcal{E}_n, \mathcal{E}_m\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\langle z, \mathcal{E}_n\rangle \overline{\langle w, \mathcal{E}_n\rangle}}{N^2},$$

où à la première égalité on a utilisé la sesquilinéarité du produit scalaire (0.75pt), et la seconde le fait que $\langle \mathcal{E}_n, \mathcal{E}_m\rangle = N\delta_n^m$ (0.5pt).

d) Voir cours et examen de cette année (0.5pt).

2. L'opérateur de transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est défini pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$ par : pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$ (0.5pt).

On a pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f(\cdot a))(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ta)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\frac{\omega}{a}u}\frac{1}{|a|}du = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(f)(\frac{\omega}{a})$ (0.75pt). La première égalité était obtenue via le changement de variable $u = ta$. Il faut prendre garde au signe de a qui peut changer le sens d'intégration, d'où les valeurs absolues qui apparaissent nécessairement.

Exercice 2 (9pt)

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

a) Rappeler la définition d'un opérateur stationnaire sur ℓ_N.

b) Montrer que la composée de deux opérateurs stationnaires de ℓ_N est également un opérateur stationnaire de ℓ_N.

2. On suppose à partir de maintenant $N = 4$ et on définit $T : \ell_4 \to \ell_4$ pour tout $z \in \ell_4$ et tout $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ par

$$T(z)(n) = 3z(n) + (-2+i)\, z(n-1) + z(n-2) + (-2-i)\, z(n+1).$$

a) Que peut-on dire de l'opérateur T ? Justifier.

b) Donner la réponse impulsionnelle h de T. Calculer sa DFT $\hat{h}$ et tracer le spectre d'amplitude de $\hat{h}$.

c) On note A la matrice de T dans la base canonique de ℓ_4. En justifiant brièvement, de quel type de matrice s'agit-il ? Donner l'expression de A.

d) Diagonaliser A dans la base de Fourier.

e) Décrire l'effet fréquentiel du filtre T ?

3. On suppose à partir de maintenant $N = 3$. On notera $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Soit $C_a : \ell_3 \to \ell_3$ l'opérateur de convolution par $a = (1, j, j^2) \in \ell_3$.

a) Écrire les éléments de la base $\mathcal{E}$ des exponentielles complexes de ℓ_3.

b) Calculer $\hat{a}$ en exploitant les propriétés de la famille $\mathcal{E}$.

c) Soit $T : \ell_3 \to \ell_3$ un opérateur stationnaire dont la réponse impulsionnelle h a pour DFT : $(3, 0, 3)$. Que vaut alors $C_a \circ T$? *Indication : on pourra raisonner en terme de multiplicateur de Fourier.*

Correction.
Total : 9 = (0.5 + 0.75) + (1 + 1.75 + 1 + 0.75 + 0.5) + (0.75 + 1 + 1).

1. a) Un opérateur $T : \ell_N \to \ell_N$ est un stationnaire si pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $T \circ R_k = R_k \circ T$, où R_k es l'opérateur de translation de k à droite (0.5pt).

b) Soit S, T deux opérateurs stationnaires. Montrons que $S \circ T$ est stationnaire. Soit $k \in \mathbb{Z}$, alors $R_k \circ (S \circ T) = (R_k \circ S) \circ T = (S \circ R_k) \circ T = S \circ (R_k \circ T) = S \circ (T \circ R_k) = (S \circ T) \circ R_k$, où on a utilisé successivement la stationnarité de S, puis de T. Donc $S \circ T$ est bien stationnaire (0.75pt).

2. a) On a $T = 3R_0 + (-2+i)R_1 + R_2 + (-2-i)R_3$, i.e. T s'écrit comme une somme d'opérateurs de translation, donc T est un opérateur stationnaire puisque commute nécessairement avec tout opérateur de translation R_k, $k \in \mathbb{Z}$ (0.75pt). Pour obtenir cette expression de T, on a utilisé le fait que pour tout $z \in \ell_4$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $z(n+1) = z(n+1-4) = z(n-3) = R_3(z)(n)$, par 4-périodicité de z (0.25pt).

b) On a $h = T(e_0)$, donc $h = (3, -2+i, 1, -2-i)$ (0.5pt).

En calculant les coefficients de Fourier de h, on vérifie que $\hat{h} = (0, 4, 8, 0)$ (1pt).

0.25 pour le spectre d'amplitude

c) Comme T est un opérateur stationnaire, on sait que sa matrice dans la base canonique est une matrice circulante (0.5pt).

La matrice A est donc circulante et sa première colonne est donnée par h. On a donc

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2-i & 1 & -2+i \\ -2+i & 3 & -2-i & 1 \\ 1 & -2+i & 3 & -2-i \\ -2-i & 1 & -2+i & 3 \end{pmatrix}. \; (0.5pt)$$

d) Comme T est un opérateur stationnaire, c'est un multiplicateur de Fourier par $\hat{h}$, i.e. $T = \mathrm{IDFT} \circ M_{\hat{h}} \circ \mathrm{DFT}$. Ainsi $A = W_4^{-1} D W_4$, où W_4 est la matrice de l'opérateur DFT et D la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \ (0.75pt)$$

e) T est un filtre passe-haut car les coefficients 0 et 3 de $\hat{h}$ sont nuls (0.5pt).

3. a) On a $\mathcal{E}_0 = (1,1,1)$, $\mathcal{E}_1 = (1, j, j^2)$ et $\mathcal{E}_2 = (1, j^2, j)$ (0.75pt).

   b) On a $a = \mathcal{E}_1 = (1, j, j^2)$ (0.25pt). Par conséquent, comme $\hat{a} = (\langle a, \mathcal{E}_m \rangle)_{0 \leqslant m \leqslant 2}$, par orthogonalité de la base $\mathcal{E}$, on obtient $\hat{a} = \|\mathcal{E}_1\|^2 e_1 = 3e_1 = (0,3,0)$ (0.75pt).

   c) Comme C_a est un opérateur de convolution, c'est donc également un multiplicateur de Fourier par $\hat{a}$ (0.5pt). T est un opérateur stationnaire donc également un multiplicateur de Fourier, par $\hat{h} = (3,0,3)$. Ainsi $C_a \circ T$ est un multiplicateur de Fourier par $\hat{a} \cdot \hat{h} = (0,0,0)$. C'est donc l'opérateur nul (0.5pt).

> T ne garde que les fréquences 0 et 3 d'un signal, alors que C_a ne conserve que la fréquence 2. Il est donc logique que $C_a \circ T = 0$.

Exercice 3 (11.75pt)

On admet dans tout cet exercice que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall t \in [-\pi, \pi[, \quad f(t) = \begin{cases} \pi, & \text{si } t \in [-\pi, 0[, \\ \pi - t, & \text{si } t \in [0, \pi[. \end{cases}$$

1. a) Représenter graphiquement f sur $[-3\pi, 3\pi]$.

   b) La fonction f est-elle continue ? Justifier qu'elle est $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

2. Pour les théorèmes de convergence d'une série de Fourier suivants :

   i) *théorème de Parseval*, ii) *théorème de convergence normale*, iii) *théorème de Dirichlet*,

   dire s'ils s'appliquent ou non à f, en justifiant brièvement.

3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n(f) = \frac{1-(-1)^n}{2\pi n^2} - \frac{(-1)^n}{2n} i$.

   b) En déduire les valeurs de $a_n(f)$ et $b_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression de $S_N(f)(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, ne faisant intervenir que des quantités réelles.

   b) En utilisant un théorème de convergence bien choisi en $t = 0$, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{4}$. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

   c) Calculer $\lim_{N \to +\infty} S_N(f)(\pi)$ et comparer le résultat à $f(\pi)$. Commenter.

5. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

<u>Correction</u>.

Total : <u>11.75</u> = (0.75 + 1) + 1.5 + (2 + 1) + (1.25 + 1.75 + 1) + 1.5.

1. a) (0.75pt)

b) f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ car elle ne l'est pas en π (les limites à gauche et à droite diffèrent). La fonction f est la restriction sur $[-\pi, \pi[$ de la fonction $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad g(t) = \begin{cases} \pi, & \text{si } t \in [-\pi, 0[, \\ \pi - t, & \text{si } t \in [0, \pi[. \end{cases}$$

qui est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-\pi, \pi]$. Donc par périodicité de f, f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ (1pt).

2. La fonction f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, elle est donc dans $L^2_p(0, 2\pi)$ et ainsi le théorème de Parseval s'applique (0.5pt).

La fonction f n'étant pas continue, le théorème de convergence normale ne s'applique pas (0.5pt).

En tant que fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ (et 2π périodique), le théorème de Dirichlet s'applique à f (0.5pt).

3. a) Soit $n \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \ (0.25pt) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} \pi e^{-int} dt + \int_0^{\pi} (\pi - t) e^{-int} dt \right). \ (0.25pt) \end{aligned}$$

Or $\int_{-\pi}^0 \pi e^{-int} dt = \pi \frac{1-(-1)^n}{-in}$ (0.25pt) et par intégration par partie, on trouve

$$\int_0^{\pi} (\pi - t) e^{-int} dt = \left[\frac{(\pi - t)}{-in} e^{-int} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{in} \int_0^{\pi} e^{-int} dt = \frac{\pi}{in} + \frac{(-1)^n - 1}{(in)^2}. \ (1pt)$$

On a donc

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \left(\pi \frac{1-(-1)^n}{-in} + \frac{\pi}{in} + \frac{(-1)^n - 1}{(in)^2} \right) = \frac{1-(-1)^n}{2\pi n^2} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{2in}}_{= -\frac{(-1)^n}{2n} i}. \ (0.25pt)$$

b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = \frac{(-1)^n}{n}$ (1pt).

4. a) On a par définition, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $S_N(f)(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt))$ (0.5pt). De plus $a_0(f) = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 \pi dt + \int_0^{\pi} (\pi - t) dt \right) = \frac{1}{\pi} \left(\pi^2 + \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{3\pi}{2}$ (0.5pt). Ainsi

$$S_N(f)(t) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2} \cos(nt) + \frac{(-1)^n}{n} \sin(nt) \right). \ (0.25pt)$$

b) On sait que l'on peut appliquer le théorème de Dirichlet (déjà vu) (0.25pt), on a donc

$$\lim_{N \to +\infty} S_N(f)(0) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \pi. \ (0.5pt)$$

Or pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N(f)(0) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^N \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}$ (0.25pt). On a donc bien

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{4}. \ (0.25pt)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, lorsque n est pair, on a $1-(-1)^n = 0$ et sinon $1-(-1)^n = 2$ (0.25pt). Ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$, d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \ (0.25pt)$$

c) On a pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N(f)(\pi) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}(-1)^n = \frac{3\pi}{4} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}$ (0.25pt). Or $\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi}{4}$, donc $\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(\pi) = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ (0.25pt).
On a $f(\pi) = \pi$, donc $\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(\pi) \neq f(\pi)$. C'est attendu, car on sait d'après le théorème de Dirichlet que $\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(\pi) = \frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2} = \frac{0+\pi}{2}$. Si f avait été continue en π, nécessairement il aurait été égal à la moyenne de ses limites à gauche et à droite en π (0.5pt).

5. On a d'après l'identité de Parseval, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$ (0.5pt).

Or $c_0(f) = \frac{a_0(f)}{2} = \frac{3\pi}{4}$ (0.25pt) et pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $|c_n(f)|^2 = \frac{4}{4\pi^2(2n+1)^4} + \frac{1}{4n^2}$ (0.25pt). Donc $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{9\pi^2}{16} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{4\pi^2(2n+1)^4} + \frac{1}{4n^2} \right)$.

Puis $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \pi^3 + \frac{\pi^3}{3} = \frac{4\pi^3}{3}$ (0.25pt), donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \pi^2 \left(\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi^2}{3} - \frac{9\pi^2}{16} \right) - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) = \pi^2 \left(\frac{5\pi^2}{96} - \frac{\pi^2}{24} \right) = \frac{\pi^4}{96}$ (0.25pt).