Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

# Licence 3ème année, Transformée de Fourier et Applications 2022-2023

**Seconde Session** du 26/06/2023

*Durée 1h30. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.*

## Exercice 1

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

a) Rappeler la définition du produit scalaire sur $\ell_N$.

b) Quelle propriété satisfait la famille $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_0, \ldots, \mathcal{E}_{N-1})$ des exponentielles complexes ? Calculer pour tout $n \in \{0, \ldots, N-1\}$, $\|\mathcal{E}_n\|_2^2$.

c) Montrer, grâce au résultat de la précédente question, que pour tous $z, w \in \ell_N$, $\langle z, w\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\langle z, \mathcal{E}_n\rangle \overline{\langle w, \mathcal{E}_n\rangle}}{N}$.

d) Donner la définition des opérateurs DFT et IDFT sur $\ell_N$.

2. Rappeler la définition de la transformée de Fourier et montrer la propriété de dilatation.

## Exercice 2

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

a) Rappeler la définition d'un opérateur stationnaire sur $\ell_N$.

b) Montrer que la composée de deux opérateurs stationnaires de $\ell_N$ est également un opérateur stationnaire de $\ell_N$.

2. On suppose à partir de maintenant $N = 4$ et on définit $T : \ell_4 \to \ell_4$ pour tout $z \in \ell_4$ et tout $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ par

$$T(z)(n) = 3z(n) + (-2 + i)\, z(n-1) + z(n-2) + (-2 - i)\, z(n+1).$$

a) Que peut-on dire de l'opérateur $T$ ? Justifier.

b) Donner la réponse impulsionnelle $h$ de $T$. Calculer sa DFT $\hat{h}$ et tracer le spectre d'amplitude de $\hat{h}$.

c) On note $A$ la matrice de $T$ dans la base canonique de $\ell_4$. En justifiant brièvement, de quel type de matrice s'agit-il ? Donner l'expression de $A$.

d) Diagonaliser $A$ dans la base de Fourier.

e) Décrire l'effet fréquentiel du filtre $T$ ?

3. On suppose à partir de maintenant $N = 3$. On notera $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Soit $C_a : \ell_3 \to \ell_3$ l'opérateur de convolution par $a = (1, j, j^2) \in \ell_3$.

a) Écrire les éléments de la base $\mathcal{E}$ des exponentielles complexes de $\ell_3$.

b) Calculer $\hat{a}$ en exploitant les propriétés de la famille $\mathcal{E}$.

c) Soit $T : \ell_3 \to \ell_3$ un opérateur stationnaire dont la réponse impulsionnelle $h$ a pour DFT : $(3, 0, 3)$. Que vaut alors $C_a \circ T$ ? *Indication : on pourra raisonner en terme de multiplicateur de Fourier.*

## Exercice 3

On admet dans tout cet exercice que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $2\pi$-périodique définie par

$$\forall t \in [-\pi, \pi[, \quad f(t) = \begin{cases} \pi, & \text{si } t \in [-\pi, 0[, \\ \pi - t, & \text{si } t \in [0, \pi[. \end{cases}$$

1. a) Représenter graphiquement $f$ sur $[-3\pi, 3\pi]$.

   b) La fonction $f$ est-elle continue ? Justifier qu'elle est $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

2. Pour les théorèmes de convergence d'une série de Fourier suivants :

   i) *théorème de Parseval*, ii) *théorème de convergence normale*, iii) *théorème de Dirichlet*,

   dire s'ils s'appliquent ou non à $f$, en justifiant brièvement.

3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n(f) = \frac{1-(-1)^n}{2\pi n^2} - \frac{(-1)^n}{2n} i$.

   b) En déduire les valeurs de $a_n(f)$ et $b_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression de $S_N(f)(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, ne faisant intervenir que des quantités réelles.

   b) En utilisant un théorème de convergence bien choisi en $t = 0$, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{4}$. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

   c) Calculer $\lim_{N \to +\infty} S_N(f)(\pi)$ et comparer le résultat à $f(\pi)$. Commenter.

5. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.