Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 3ème année, 2021-2022, Transformée de Fourier et Applications

Seconde session du 23/06/2022

Durée 1h30. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants. On prendra soin de bien justifier les réponses.

Total : 18.25 = 4 + 5.5 + 6.75 + 2.

Exercice 1. (Cours)

1. a) Rappeler la définition du produit scalaire sur l'espace $L^2_p(0, 2\pi)$ et de la norme quadratique (ou norme 2).

   b) Rappeler la définition des coefficients de Fourier complexes et réels de $f \in L^2_p(0, 2\pi)$.

2. On suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue par morceaux et 2π-périodique.

   a) Rappeler le Lemme de Riemann-Lebesgue qui concerne la suite des coefficients de Fourier complexes $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ de f.

   b) On suppose de plus (et pour la suite de cette question 2.) que f est $\mathcal{C}^2$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad c_n(f) = -\frac{1}{n^2} c_n(f'').$$

   c) Justifier alors que la série de Fourier de f converge normalement.

   d) Que vaut alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{int}$?

Correction.

Total : 4 = (0.5 + 0.75) + (0.5 + 0.75 + 1 + 0.5).

1. Notons $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la famille des fonctions exponentielles complexes : pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $e_n(t) = e^{int}$.

   a) Pour $f, g \in L^2_p(0, 2\pi)$, le produit scalaire est : $\langle f,\, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$, et la norme quadratique : $\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}$ (0.5pt).

   b) Pour $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \langle f,\, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt$ et $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$ (0.75pt).

2. a) Lemme de Riemann-Lebesgue : $\lim_{|n|\to+\infty} c_n(f) = 0$ (0.5pt).

   b) On montre par deux intégrations par partie sucessives que $c_n(f'') = (in)^2 c_n(f)$ (0.75pt).

   c) La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)$ converge absolument car

•par le Lemme de Riemann-Lebesgue $\lim_{|n|\to+\infty} c_n(f'') = 0$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ satisfaisant $|n| \geqslant n_0$, on a $|c_n(f'')| \leqslant 1$,

•d'où pour tout $n \in \mathbb{Z}$ satisfaisant $|n| \geqslant n_0$, on a $|c_n(f)| \leqslant \frac{1}{n^2}$ et on conclut par critère de comparaison (0.5pt).

Enfin on sait que la convergence absolue de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)$ implique la convergence normale de la série de Fourier de f : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$ (0.5pt).

d) Comme la série de Fourier de f converge normalement et que f et continue, cette dernière converge ponctuellement vers f. Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{int} = f(t)$ (0.5pt).

Exercice 2.

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

a) Rappeler les définitions de la base canonique $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_{N-1})$ et de la base $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{N-1})$ des exponentielles complexes de ℓ_N.

b) Donner la définition d'un opérateur $T : \ell_N \to \ell_N$ de convolution.

2. On suppose à partir de maintenant $N = 4$ et on définit $T : \ell_4 \to \ell_4$ pour tout $z \in \ell_4$ et tout $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ par

$$T(z)(n) = z(n) + \left(\frac{3}{4} - \frac{i}{4}\right) z(n-1) + \frac{1}{2} z(n-2) + \left(\frac{3}{4} + \frac{i}{4}\right) z(n+1).$$

a) Écrire T comme une somme d'opérateurs de translation puis comme un opérateur de convolution. T est-il un opérateur stationnaire ?

b) Donner la réponse impulsionnelle h de T. Calculer sa DFT $\hat{h}$.

c) On note A la matrice de T dans la base canonique de ℓ_4. En justifiant brièvement, de quel type de matrice s'agit-il ? Donner l'expression de A.

d) Rappeler la définition générale d'un opérateur multiplicateur de Fourier. Écrire T comme un opérateur multiplicateur de Fourier.

e) En justifiant brièvement, à quel type de filtre peut-on assimiler T ?

Correction.

Total : 5.5 = (0.5 + 0.5) + (1 + 1 + 1 + 1 + 0.5).

1. a) Pour tout $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, $e_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $e_n(k) = 1$ si $n - k$ divisible par N et $e_n(k) = 0$ sinon. En utilisant l'isomorphisme entre ℓ_N et $\mathbb{C}^N$, on peut écrire de manière équivalente $e_n = (\delta_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant N-1}$ (0.25pt).

Pour $\mathcal{E}$, on a pour tout $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{E}_m(n) = e^{2i\pi\frac{mn}{N}}$ (0.25pt).

b) Un opérateur $T : \ell_N \to \ell_N$ est de convolution s'il existe $w \in \ell_N$ tel que pour tout $z \in \ell_N$, $T(z) = w * z = \left(\sum_{k=0}^{N-1} w(k)z(n-k)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ (0.5pt).

2. a) On a $T = \mathrm{Id} + \left(\frac{3}{4} - \frac{i}{4}\right) R_1 + \frac{1}{2} R_2 + \left(\frac{3}{4} + \frac{i}{4}\right) R_3$ (0.5pt). Vu la forme d'un opérateur de convolution donnée à la question précédente, on a donc pour tout $z \in \ell_N$, $T(z) = w * z$ avec $w = \left(1, \frac{3}{4} - \frac{i}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4} + \frac{i}{4}\right)$. Puisque T est donc un opérateur de convolution, c'est par conséquent également un opérateur stationnaire (0.5pt).

b) La réponse impulsionnelle h et T vaut $h = w$ (0.25pt). On trouve que $\hat{h} = (3, 0, 0, 1)$ (0.75pt).

c) Comme T est stationnaire, la matrice de T dans la base canonique, i.e. A, est circulante (0.5pt). Comme h représente la première colonne de A, on a donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} + \frac{i}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} - \frac{i}{4} \\ \frac{3}{4} - \frac{i}{4} & 1 & \frac{3}{4} + \frac{i}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} - \frac{i}{4} & 1 & \frac{3}{4} + \frac{i}{4} \\ \frac{3}{4} + \frac{i}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} - \frac{i}{4} & 1 \end{pmatrix} .(0.5pt)$$

d) Un opérateur multiplicateur de Fourier s'écrit $M_{(w)} = \mathrm{IDFT} \circ M_w \circ \mathrm{DFT}$ où $w \in \ell_N$ et M_w est l'opérateur de multiplication par w. Appliquer un tel opérateur à un signal quelconque revient à multiplier la DFT de ce signal par w puis de repasser dans le domaine temporel (0.5pt). Comme T est un opérateur stationnaire, c'est un multiplicateur de Fourier par $\hat{h}$. On a donc $T = \mathrm{IDFT} \circ M_{\hat{h}} \circ \mathrm{DFT}$ (0.5pt).

e) Comme $\hat{h} = (3, 0, 0, 1)$, seules les basses fréquences d'un signal $z \in \ell_4$ (s'apparentant aux coefficients $m = 0, 3$) sont conservées et amplifiés car les hautes fréquences de z sont multipliés par 0 et les hautes fréquences par des valeurs plus supérieures ou égales à 1. T est donc un filtre passe-bas (0.5pt).

Exercice 3. (Séries de Fourier)
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et définie par

$$\forall t \in [0, 2\pi[, \quad f(t) = -t + \pi.$$

1. Représenter graphiquement la fonction f sur $[-2\pi, 2\pi]$. *Indication : on prendra bien soin de faire apparaître clairement sur le graphe les valeurs de f en $2k\pi$ pour $k \in \{-1, 0, 1\}$.*

2. La fonction f est-elle continue ?

3. Quelle est la régularité de f ? Justifier brièvement.

4. a) Calculer $c_0(f)$.

b) Calculer pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n(f)$.

c) En utilisant l'égalité de Parceval, déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5. a) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f)$.

b) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f)$.

c) Montrer que la série de Fourier partielle symétrique d'ordre $N \in \mathbb{N}^*$ de f, i.e. $S_N(f)$, vaut

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_N(f)(t) = 2\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nt)}{n}.$$

d) Vers quoi la série de Fourier de f converge-t-elle ponctuellement ? Justifier.

e) A-t-on pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \lim_{N\to+\infty} S_N(f)(t)$?

f) Montrer que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Indication : au cours de la preuve, on pourra séparer les termes paires et impaires d'une somme.

Correction.

Total : 6.75 = 0.5 + 0.5 + 0.25 + (0.5 + 0.75 + 1) + (0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.75).

1. Voir la figure 1 (0.5pt).

2. Non car même si la fonction est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, 2\pi[$ et est 2π-périodique, il y a une discontinuité en tous les $2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, puisque la limite à gauche de f en ces points vaut $-\pi$ et la limite à droite vaut π (0.5pt).

3. f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux car elle est 2π-périodique et c'est la restriction sur $]0, 2\pi[$ d'une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi]$ (0.25pt).

4. a) On a $c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$. C'est la valeur moyenne de f. On vérifie que $c_0(f) = 0$ (0.5pt).

   b) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(-t+\pi)e^{-int}dt, \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\left[(-t+\pi)\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{e^{-int}}{in}dt\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{in} + \frac{\pi}{in} - 0\right) = \frac{1}{in}.(0.75pt) \end{aligned}$$

   c) D'après l'identité de Parceval, on a $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt$ (0.5pt). Or

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = 2\int_0^{\pi}(-t+\pi)^2 dt = \frac{2\pi^3}{3},$$

   et

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} |c_n(f)|^2 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} |c_{-n}(f)|^2 = 2\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2},$$

   donc on obtient bien $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (0.5pt).

5. a) On a pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = 0$ (0.5pt).

b) On a pour $n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = \frac{2}{n}$ (0.5pt).

c) On a pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$

$$S_N(f)(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)) = 2\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(nt)}{n}.(0.5pt)$$

d) Comme f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique, le théorème de Dirichlet s'applique et donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(t) = (f(t^-) + f(t^+))/2$ (0.5pt).

e) C'est seulement le cas de manière certaine aux $t \in \mathbb{R}$ où f est continue. Or, par exemple, en 0, f n'est pas continue. En ce cas $\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(0) = 0$, car les limites à gauche et à droite de f en 0 sont respectivement $-\pi$ et π (ici il se trouve que l'on a directement $S_N(f)(0) = 0$ pour tout N). Or $f(0) = \pi$, d'où $f(0) \neq \lim_{N\to+\infty} S_N(f)(0)$ (0.5pt).

f) On a d'après d), $\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $S_{2N}(f)(\frac{\pi}{2}) = 2\sum_{p=1}^{N}\frac{\sin(p\pi)}{2p} + 2\sum_{p=0}^{N-1}\frac{\sin((2p+1)\frac{\pi}{2})}{2p+1} = 2\sum_{p=0}^{N-1}\frac{(-1)^p}{2p+1}$. On a toujours $\lim_{N\to+\infty} S_{2N}(f)(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ (suite extraite), donc on a bien $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$ (0.75pt).

Exercice 4. (Transformée de Fourier)
On rappelle que la transformée de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est définie (quand cela a un sens) par la formule

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

1. Rappeler la définition de l'espace $L^1(\mathbb{R})$. Justifier que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\omega)$ est bien définie.

2. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Rappeler la définition du produit de convolution $f * g$. Que vaut $\mathcal{F}(f * g)$?

3. Soit $\sigma > 0$. On admet que la transformée de Fourier de la fonction $g_\sigma : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ vaut

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \widehat{g_\sigma}(\omega) = \sigma e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}.$$

Trouver $f \in L^1(\mathbb{R})$ satisfaisant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)f(t-s)ds = g_\sigma(t) \quad \text{et} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\omega) > 0.$$

Correction.
Total : 2 = 0.5 + 0.5 + 1.

1. On a $L^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f$ suffisamment régulière et $\int_{\mathbb{R}} |f| < +\infty\}$ (0.25pt). Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors pour tout $t, \omega \in \mathbb{R}$, $|f(t)e^{-i\omega t}| = |f(t)|$ donc par critère de comparaison, $t \mapsto f(t)e^{-i\omega t}$ est intégrable et donc $\hat{f}(\omega)$ est bien définie (0.25pt).

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f * g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s)g(t-s)ds$ et pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, $\widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$ (0.5pt).

3. De la première égalité et par la propriété de la transformée de Fourier vis à vis de la convolution, on déduit que pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\omega)^2 = \hat{g}_\sigma(\omega)$. Comme $\hat{f}(\omega) > 0$, on déduit que $\hat{f}(\omega) = \sqrt{\sigma}e^{-\sigma^2\omega^2/4} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sigma}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{2}} e^{-\frac{(\frac{\sigma}{\sqrt{2}})^2\omega^2}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\sigma}} \cdot \widehat{g_{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}}(\omega)$. Par injectivité de l'opérateur de transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$, on déduit donc que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \sqrt{\frac{2}{\sigma}} \cdot g_{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}(t)$ (1pt).

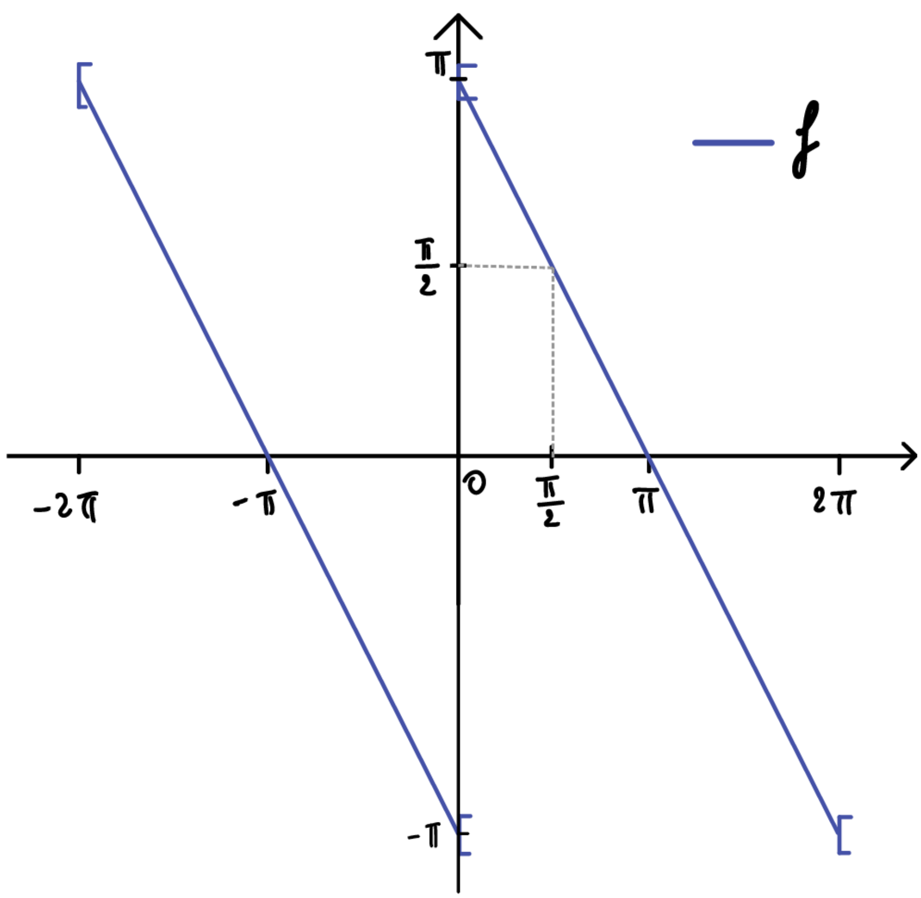

Figure 1: Fonction f sur $[-2\pi, 2\pi]$ de Exercice 3, 1.