Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 3ème année, 2021-2022, TRANSFORMÉE DE FOURIER ET APPLICATIONS

Seconde session du 23/06/2022

Durée 1h30. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants. On prendra soin de bien justifier les réponses.

Exercice 1. (Cours)

1. a) Rappeler la définition du produit scalaire sur l'espace $L^2_p(0, 2\pi)$ et de la norme quadratique (ou norme 2).

b) Rappeler la définition des coefficients de Fourier complexes et réels de $f \in L^2_p(0, 2\pi)$.

2. On suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue par morceaux et 2π-périodique.

a) Rappeler le Lemme de Riemann-Lebesgue qui concerne la suite des coefficients de Fourier complexes $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ de f.

b) On suppose de plus (et pour la suite de cette question 2.) que f est $\mathcal{C}^2$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad c_n(f) = -\frac{1}{n^2} c_n(f'').$$

c) Justifier alors que la série de Fourier de f converge normalement.

d) Que vaut alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{int}$?

Exercice 2.

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

a) Rappeler les définitions de la base canonique $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_{N-1})$ et de la base $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_{N-1})$ des exponentielles complexes de ℓ_N.

b) Donner la définition d'un opérateur $T : \ell_N \to \ell_N$ de convolution.

2. On suppose à partir de maintenant $N = 4$ et on définit $T : \ell_4 \to \ell_4$ pour tout $z \in \ell_4$ et tout $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ par

$$T(z)(n) = z(n) + \left(\frac{3}{4} - \frac{i}{4}\right) z(n-1) + \frac{1}{2} z(n-2) + \left(\frac{3}{4} + \frac{i}{4}\right) z(n+1).$$

a) Écrire T comme une somme d'opérateurs de translation puis comme un opérateur de convolution. T est-il un opérateur stationnaire ?

b) Donner la réponse impulsionnelle h de T. Calculer sa DFT $\hat{h}$.

c) On note A la matrice de T dans la base canonique de ℓ_4. En justifiant brièvement, de quel type de matrice s'agit-il ? Donner l'expression de A.

d) Rappeler la définition générale d'un opérateur multiplicateur de Fourier. Écrire T comme un opérateur multiplicateur de Fourier.

e) En justifiant brièvement, à quel type de filtre peut-on assimiler T ?

Exercice 3. (Séries de Fourier)
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et définie par

$$\forall t \in [0, 2\pi[, \quad f(t) = -t + \pi.$$

1. Représenter graphiquement la fonction f sur $[-2\pi, 2\pi]$. *Indication : on prendra bien soin de faire apparaître clairement sur le graphe les valeurs de f en $2k\pi$ pour $k \in \{-1, 0, 1\}$.*

2. La fonction f est-elle continue ?

3. Quelle est la régularité de f ? Justifier brièvement.

4. a) Calculer $c_0(f)$.

b) Calculer pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n(f)$.

c) En utilisant l'égalité de Parceval, déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5. a) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f)$.

b) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f)$.

c) Montrer que la série de Fourier partielle symétrique d'ordre $N \in \mathbb{N}^*$ de f, i.e. $S_N(f)$, vaut

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_N(f)(t) = 2\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nt)}{n}.$$

d) Vers quoi la série de Fourier de f converge-t-elle ponctuellement ? Justifier.

e) A-t-on pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \lim_{N \to +\infty} S_N(f)(t)$?

f) Montrer que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Indication : au cours de la preuve, on pourra séparer les termes paires et impaires d'une somme.

Exercice 4. (Transformée de Fourier)
On rappelle que la transformée de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est définie (quand cela a un sens) par la formule

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

1. Rappeler la définition de l'espace $L^1(\mathbb{R})$. Justifier que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\omega)$ est bien définie.

2. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Rappeler la définition du produit de convolution $f * g$. Que vaut $\mathcal{F}(f * g)$?

3. Soit $\sigma > 0$. On admet que la transformée de Fourier de la fonction $g_\sigma : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ vaut

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \widehat{g_\sigma}(\omega) = \sigma e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}}.$$

Trouver $f \in L^1(\mathbb{R})$ satisfaisant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) f(t-s) ds = g_\sigma(t) \quad \text{et} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\omega) > 0.$$