Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 3ème année, Transformée de Fourier et Applications 2022-2023

Partiel du 09/03/2023

Durée 1h30. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.

Total : 16.5 = 4.5 + 4 + 8

Exercice 1 (Cours) (4.5pt)

On considère l'espace ℓ_N des suites complexes N-périodiques avec $N \in \mathbb{N}^*$.

1. Rappeler la définition de la famille des exponentielles complexes $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_{N-1})$ et montrer que c'est une base orthogonale de ℓ_N.

2. Montrer la formule de décomposition suivante : pour tout $z \in \ell_N$, $z = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m)\mathcal{E}_m$. *Indication : on souhaite une démonstration spécifique au contexte de l'exercice et non basée sur le résultat général vu en cours.*

3. Soit $z \in \ell_N$. Montrer que $\hat{\bar{z}} = \overline{\hat{z}(-\cdot)}$. En déduire une CNS impliquant $\hat{z}$ et garantissant que z soit réel.

4. Donner la matrice W_4 de la transformée de Fourier discrète dans la base canonique de ℓ_4. Exprimer W_4^{-1} en fonction de W_4.

Correction.
Total : 4.5 = 1.5 + 1 + 1 + 1.

1. On a pour tout $m \in \{0, \ldots, N-1\}$, $\mathcal{E}_m = \left(e^{2i\pi\frac{mn}{N}}\right)_{0\leqslant n\leqslant N-1}$ (0.5pt).

Pour $m, m' \in \{0, \ldots, N-1\}$, $\langle \mathcal{E}_m, \mathcal{E}_{m'} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi\frac{(m-m')n}{N}}$. Si $m = m'$, alors cette somme vaut N. Sinon cette somme à N termes est géométrique de raison $e^{2i\pi\frac{m-m'}{N}} \neq 1$ qui est une racine N-ième de l'unité, d'où $\langle \mathcal{E}_m, \mathcal{E}_{m'} \rangle = 0$. La famille $\mathcal{E}$ est donc bien orthogonale et c'est donc également une base (1pt).

2. Comme $\mathcal{E}$ est une base, pour tout $z \in \ell_N$, il existe $\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1} \in \mathbb{C}$ tels que $z = \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_m \mathcal{E}_m$. On a donc pour tout $m' \in \{0, \ldots, N-1\}$, $\langle z, \mathcal{E}_{m'} \rangle = \alpha_m N$ par linéarité à gauche du produit scalaire et propriétés d'orthogonalité de la famille $\mathcal{E}$. D'où la formule souhaitée (1pt).

3. On a pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\hat{\bar{z}}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{z(n)} e^{-2i\pi\frac{mn}{N}} = \overline{\sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2i\pi\frac{(-m)n}{N}}} = \overline{\hat{z}(-m)}$ (0.5pt).

On a z réel si et seulement si $\bar{z} = z$, donc si et seulement si $\hat{\bar{z}} = \hat{z}$ (puisque DFT est bijectif). Or d'après ce qui précède, $\hat{\bar{z}} = \overline{\hat{z}(-\cdot)}$, donc z est réel si et seulement si $\overline{\hat{z}(-\cdot)} = \hat{z}$ (soit pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\hat{z}(m) = \overline{\hat{z}(N-m)}$) (0.5pt).

4. On a $W_4 = (\alpha^{mn})_{0\leqslant m,n\leqslant N-1}$ avec $\alpha = e^{-2i\pi\frac{1}{4}} = -i$. D'où

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}. \text{ (0.5}pt\text{)}$$

Comme $\frac{1}{\sqrt{4}}W_4$ est unitaire, on a donc $\left(\frac{1}{2}W_4\right)^{-1} = \frac{1}{2}W_4^*$, d'où $W_4^{-1} = \frac{1}{4}W_4^*$ (0.5pt).

Exercice 2 (4pt)

On considère le signal continu suivant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad s(t) = -2\cos\left(2\pi\frac{10}{256}t\right) + 7\sin\left(2\pi\frac{125}{256}t\right).$$

1. Donner l'expression du signal discret $z \in \ell_{256}$ obtenu par échantillonnage de s à un pas de temps de 1, à l'aide d'exponentielles complexes.
2. À partir de l'expression précédente, en déduire $\hat{z}$ la DFT de z.
3. Dessiner le spectre d'amplitude de $\cancel{\hat{z}}$ z. Commenter le contenu fréquentiel de z.
4. Définir T un multiplicateur de Fourier par $w \in \ell_{256}$ de sorte que $T(z)$ ne contienne que des basses fréquences.

Correction.
Total : $\underline{4} = 1 + 1 + 1.25 + 0.75$.

1. On a pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
z(n) = s(n) &= -2\cos\left(2\pi\frac{10}{256}n\right) + 7\sin\left(2\pi\frac{125}{256}n\right), \\
&= -2\frac{e^{2i\pi\frac{10}{256}n} + e^{-2i\pi\frac{10}{256}n}}{2} + 7\frac{e^{2i\pi\frac{125}{256}n} - e^{-2i\pi\frac{125}{256}n}}{2i}, \\
&= -e^{2i\pi\frac{10}{256}n} + \frac{7}{2i}e^{2i\pi\frac{125}{256}n} - \frac{7}{2i}e^{2i\pi\frac{131}{256}n} - e^{2i\pi\frac{246}{256}n}. \ (1pt)
\end{aligned}
$$

2. On sait que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $z(n) = \frac{1}{256}\sum_{m=0}^{255}\hat{z}(m)e^{2i\pi\frac{m}{256}n}$. Donc par identification, on obtient $\hat{z}(10) = \hat{z}(246) = -256$, $\hat{z}(125) = 256 \cdot \frac{7}{2i}$, $\hat{z}(131) = -256 \cdot \frac{7}{2i}$ et $\hat{z}(m) = 0$ pour tout $m \in \{0, \ldots, 255\} \setminus \{10, 125, 131, 246\}$ (1pt).
3. Voir la Figure 1 pour une représentation du spectre d'amplitude de z (0.75pt).

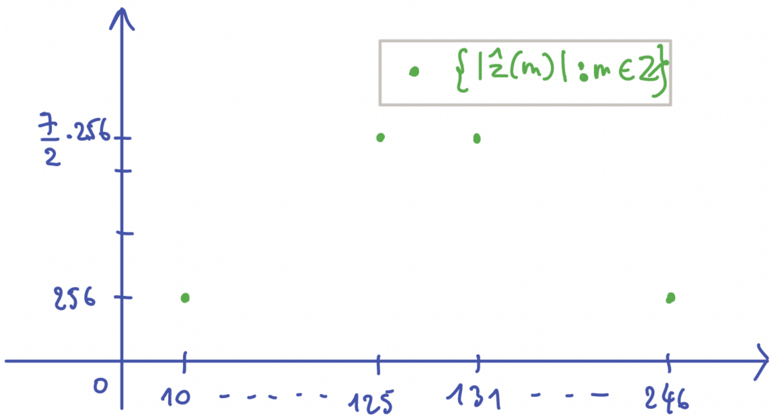

Figure 1. Spectre d'amplitude de z. Seules les valeurs non nulles de $|\hat{z}(m)|$ sont représentées.

z est composé à la fois de basses fréquences ($m \in \{10, 246\}$) et de haute fréquence ($m \in \{125, 131\}$) (0.5pt).

4. Il suffit de choisir $w \in \ell_{256}$ de sorte que les hautes fréquences 125 et 131 de z soient supprimées, mais les basses fréquences 10 et 246 conservées. Par exemple c'est le cas en définissant $w = (1, \ldots, \underbrace{1}_{n=10}, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n=246}, \ldots, 1)$, puisqu'alors par définition d'un multiplicateur de Fourier par w, $\widehat{T(z)} = w \cdot \hat{z} = (0, \ldots, 0, \hat{z}(10), 0, \ldots, 0, \hat{z}(246), 0, \ldots, 0)$ (0.75pt).

Exercice 3 (8pt)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_0, \ldots, e_{N-1})$ la base canonique de ℓ_N.

1. a) Rappeler la définition de la base $\mathcal{B}$.

   On supposera dans la suite que e_n est défini pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par N-périodicité via la formule $e_n \stackrel{\text{def.}}{=} e_{n[N]}$, où $n[N]$ est le reste de la division euclidienne de n par N (par exemple $e_{N+1} \stackrel{\text{def.}}{=} e_1$).

   b) Soit $k \in \mathbb{Z}$, rappeler la définition de l'opérateur de translation de k à droite, noté R_k. Soit $n \in \mathbb{Z}$, que vaut $R_k(e_n)$? En supposant $N = 4$, représenter graphiquement e_1 et $R_3(e_1)$.
2. a) Donner la définition d'une matrice circulante C de taille $N \times N$.

b) Supposons $N = 4$, donner l'expression de la matrice C circulante dont la première colonne est

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1+i \\ 0 \\ -1-i \end{pmatrix}.$$

3. Soit $T : \ell_N \to \ell_N$ une application linéaire de matrice C dans la base $\mathcal{B}$. On suppose que C est circulante et que sa première colonne est

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix}.$$

a) Justifier, <u>sans calculs</u>, que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $R_k \circ T = T \circ R_k$.

b) Montrer que

$$T = \sum_{k=0}^{N-1} c_k R_k. \tag{1}$$

Indication : on pourra commencer par donner l'expression de la matrice C, puis en déduire les $T(e_n)$ pour $n \in \{0, \dots, N-1\}$.

Retrouver alors le résultat de la question 3.a).

c) Déduire de (1) que pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$, $\mathcal{E}_n$ est un vecteur propre de T. On exprimera la valeur propre associée en fonction de $\hat{c} = \mathrm{DFT}(c)$, où $c = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1}) \in \ell_N$.

d) Déduire de la question précédente que pour tout $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, $T \circ \mathrm{IDFT}(e_n) = \mathrm{IDFT}(\hat{c}(n) e_n)$.
Indication : on pourra dans un premier temps calculer $IDFT(e_n)$.

En déduire que T est un multiplicateur de Fourier par $\hat{c}$.

4. On suppose dans cette question que T a pour matrice C donnée dans la question 2.b). Donner, <u>sans calculs</u>, la valeur de $\hat{c}(0)$. Calculer les autres coefficients de Fourier de c.

<u>Correction</u>.
Total : <u>8</u> = (0.5 + 1.5) + (0.75 + 0.5) + (0.5 + 1.25 + 0.75 + 1.25) + 1.

1. a) Soit $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $e_n(k) = \delta_{k[N],n}$ (0.5pt).

b) Soit $k \in \mathbb{Z}$, on a $R_k : \ell_N \to \ell_N$ linéaire et définie pour tout $z \in \ell_N$ par $R_k(z) = z(\cdot - k) = (z(n-k))_{n \in \mathbb{Z}}$ (0.5pt).

Soit $n \in \mathbb{Z}$, on a donc $R_k(e_n) = e_n(\cdot - k) = (e_n(n'-k))_{n' \in \mathbb{Z}} = \left(\delta_{n'-k[N],n[N]}\right)_{n' \in \mathbb{Z}} = \left(\delta_{n'[N],n+k[N]}\right)_{n' \in \mathbb{Z}} = e_{n+k}$ (0.5pt).

> De manière équivalente, on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e_n(n'-k) = 1$ si et seulement si $n' - k = n[N]$, i.e. $n' = n + k[N]$, $e_n(n'-k) = 0$ sinon. On reconnaît donc bien e_{n+k}.

Voir la Figure 2 pour une représentation des quantités exigées (0.5pt).

2. a) Soit $(c_{m,n})_{m,n \in \mathbb{Z}}$ une suite indéxée sur $\mathbb{Z}^2$ à valeurs complexes et que l'on suppose N-périodique par rapport à chacuns de ses indices. Alors $C = (c_{m,n})_{0 \leqslant m,n \leqslant N-1}$ est une matrice N-périodique. On dit que C est circulante si pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$, on a $c_{m+1,n+1} = c_{m,n}$ (0.75pt).

b) On a

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1-i & 0 & -1+i \\ -1+i & 2 & -1-i & 0 \\ 0 & -1+i & 2 & -1-i \\ -1-i & 0 & -1+i & 2 \end{pmatrix}. (0.5pt)$$

3. a) Comme la matrice C dans la base $\mathcal{B}$ de l'opérateur T est circulante, on sait d'après le cours que T est un opérateur stationnaire, i.e. vérifie pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $R_k \circ T = T \circ R_k$ (0.5pt).

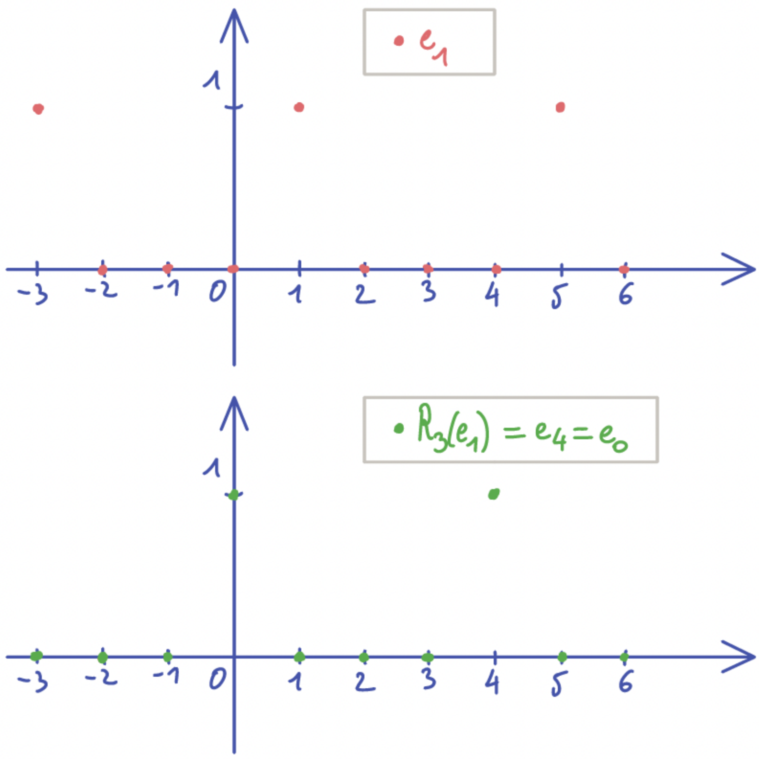

FIGURE 2. D'après ce que l'on a montré, on a $R_3(e_1) = e_4 = e_0$. On remarque bien que l'on a translaté e_1 de 3 vers la droite pour obtenir $R_3(e_1)$, ou translaté de 1 vers la gauche puisque $R_3 = R_{-1}$.

b) Comme C est circulante, on a donc

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_{N-1} & c_{N-2} & \cdots & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{N-1} & \ddots & \ddots & c_2 \\ c_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{N-1} & c_{N-2} \\ c_{N-2} & \ddots & \ddots & c_1 & c_0 & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_{N-2} & \cdots & c_2 & c_1 & c_0 \end{pmatrix}. \,(0.25pt)$$

D'où pour tout $n \in \{0, \ldots, N-1\}$, $T(e_n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e_{k+n} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k R_k(e_n)$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de ℓ_N, on a donc bien $T = \sum_{k=0}^{N-1} c_k R_k$ (0.5pt).

Soit $k' \in \mathbb{Z}$, alors $R_{k'} \circ T = R_{k'} \circ \left(\sum_{k=0}^{N-1} c_k R_k\right) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k R_{k'} \circ R_k = \sum_{k=0}^{N-1} c_k R_{k'+k} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k R_k \circ R_{k'} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} c_k R_k\right) \circ R_{k'} = T \circ R_{k'}$ (0.5pt).

c) Soit $n, k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, alors $R_k(\mathcal{E}_n) = (\mathcal{E}_n(n' - k))_{0 \leqslant n' \leqslant N-1} = e^{-2i\pi \frac{kn}{N}} \mathcal{E}_n$. Donc $T(\mathcal{E}_n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{-2i\pi \frac{kn}{N}} \mathcal{E}_n = \hat{c}(n)\mathcal{E}_n$. Donc $\mathcal{E}_n$ est un vecteur propre de T de valeur propre $\hat{c}(n)$ (0.75pt).

d) Soit $n \in \{0, \ldots, N-1\}$. On sait que $\widehat{\mathcal{E}_n} = N e_n$ (par orthogonalité de la famille $\mathcal{E}$) donc $\mathrm{IDFT}(e_n) = \frac{1}{N}\mathcal{E}_n$ (alternativement faire un calcul direct) (0.5pt). Or on a vu que $T(\mathcal{E}_n) = \hat{c}(n)\mathcal{E}_n$, d'où $T(\mathrm{IDFT}(e_n)) = \hat{c}(n)\mathrm{IDFT}(e_n) = \mathrm{IDFT}(\hat{c}(n)e_n)$ (0.25pt).

Comme cette dernière relation est vraie pour tout $n \in \{0, \ldots, N-1\}$ et que $\mathcal{B}$ est une base de ℓ_N, on obtient $T \circ \mathrm{IDFT} = \mathrm{IDFT} \circ M_{\hat{c}}$, où $M_{\hat{c}}$ est l'opérateur de multiplication par $\hat{c}$. On obtient finalement $T = \mathrm{IDFT} \circ M_{\hat{c}} \circ \mathrm{DFT}$, i.e. T est un multiplicateur de Fourier par $\hat{c}$ (0.5pt).

4. $\hat{c}(0)$ est proportionnel à la valeur moyenne de la suite 4-périodique $c = (2, -1+i, 0, -1-i)$. Donc $\hat{c}(0) = 0$ (0.25pt). En utilisant la formule de la DFT, on trouve ensuite que $\hat{c}(1) = \hat{c}(2) = 4$ et $\hat{c}(3) = 0$ (0.75pt).