Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 3ème année, Transformée de Fourier et Applications 2022-2023

Partiel du 09/03/2023

Durée 1h30. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 (Cours) (4.5pt)

On considère l'espace ℓ_N des suites complexes N-périodiques avec $N \in \mathbb{N}^*$.

1. Rappeler la définition de la famille des exponentielles complexes $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_{N-1})$ et montrer que c'est une base orthogonale de ℓ_N.
2. Montrer la formule de décomposition suivante : pour tout $z \in \ell_N$, $z = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m)\mathcal{E}_m$. *Indication : on souhaite une démonstration spécifique au contexte de l'exercice et non basée sur le résultat général vu en cours.*
3. Soit $z \in \ell_N$. Montrer que $\hat{\hat{z}} = \overline{\hat{z}(-\cdot)}$. En déduire une CNS impliquant $\hat{z}$ et garantissant que z soit réel.
4. Donner la matrice W_4 de la transformée de Fourier discrète dans la base canonique de ℓ_4. Exprimer W_4^{-1} en fonction de W_4.

Exercice 2 (4pt)

On considère le signal continu suivant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad s(t) = -2\cos\left(2\pi \frac{10}{256} t\right) + 7 \sin\left(2\pi \frac{125}{256} t\right).$$

1. Donner l'expression du signal discret $z \in \ell_{256}$ obtenu par échantillonnage de s à un pas de temps de 1, à l'aide d'exponentielles complexes.
2. À partir de l'expression précédente, en déduire $\hat{z}$ la DFT de z.
3. Dessiner le spectre d'amplitude de $\cancel{\hat{z}}$ z. Commenter le contenu fréquentiel de z.
4. Définir T un multiplicateur de Fourier par $w \in \ell_{256}$ de sorte que $T(z)$ ne contienne que des basses fréquences.

Exercice 3 (8pt)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_0, \ldots, e_{N-1})$ la base canonique de ℓ_N.

1. a) Rappeler la définition de la base $\mathcal{B}$.

   On supposera dans la suite que e_n est défini pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par N-périodicité via la formule $e_n \stackrel{\text{def.}}{=} e_{n[N]}$, où $n[N]$ est le reste de la division euclidienne de n par N (par exemple $e_{N+1} \stackrel{\text{def.}}{=} e_1$).

   b) Soit $k \in \mathbb{Z}$, rappeler la définition de l'opérateur de translation de k à droite, noté R_k. Soit $n \in \mathbb{Z}$, que vaut $R_k(e_n)$? En supposant $N = 4$, représenter graphiquement e_1 et $R_3(e_1)$.
2. a) Donner la définition d'une matrice circulante C de taille $N \times N$.

b) Supposons $N = 4$, donner l'expression de la matrice C circulante dont la première colonne est

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1+i \\ 0 \\ -1-i \end{pmatrix}.$$

3. Soit $T : \ell_N \to \ell_N$ une application linéaire de matrice C dans la base $\mathcal{B}$. On suppose que C est circulante et que sa première colonne est

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix}.$$

a) Justifier, <u>sans calculs</u>, que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $R_k \circ T = T \circ R_k$.

b) Montrer que

$$T = \sum_{k=0}^{N-1} c_k R_k. \tag{1}$$

Indication : on pourra commencer par donner l'expression de la matrice C, puis en déduire les $T(e_n)$ pour $n \in \{0, \dots, N-1\}$.

Retrouver alors le résultat de la question 3.a).

c) Déduire de (1) que pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$, $\mathcal{E}_n$ est un vecteur propre de T. On exprimera la valeur propre associée en fonction de $\hat{c} = \mathrm{DFT}(c)$, où $c = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1}) \in \ell_N$.

d) Déduire de la question précédente que pour tout $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, $T \circ \mathrm{IDFT}(e_n) = \mathrm{IDFT}(\hat{c}(n)e_n)$. *Indication : on pourra dans un premier temps calculer $IDFT(e_n)$.*

En déduire que T est un multiplicateur de Fourier par $\hat{c}$.

4. On suppose dans cette question que T a pour matrice C donnée dans la question 2.b). Donner, <u>sans calculs</u>, la valeur de $\hat{c}(0)$. Calculer les autres coefficients de Fourier de c.