Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 3ème année, 2021-2022, Transformée de Fourier et Applications

Partiel du 10/03/2022

Durée 1h30. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants. On prendra soin de bien justifier les réponses.

Total : 14.5 = 3.5 + 7 + 4 (+1 bonus).

Exercice 1. (3.5pt)
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace ℓ_N des suites complexes N-périodique.

1. Donner la définition de la famille $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{N-1})$ des exponentielles complexes. Rappeler ce que vaut $\langle \mathcal{E}_n,\, \mathcal{E}_m \rangle$ pour $n, m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Commenter.

2. Rappeler la définition de la transformée de Fourier discrète et de la transformée de Fourier discrète inverse.

3. Montrer l'identité de Parceval : pour tout $z, w \in \ell_N$, $\langle z,\, w \rangle = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m)\overline{\hat{w}(m)}$.

4. Donner la matrice W_3 de la transformée de Fourier discrète dans la base canonique de ℓ_3 ainsi que la matrice de la transformée de Fourier discrète inverse (également dans la base canonique).

<u>Correction.</u>

1. Définition famille $\mathcal{E}$ (0.25pt), produit scalaire (0.25pt), commentaire famille orthogonale (0.25pt).

2. (0.5pt) + (0.5pt).

3. On s'attend à ce qu'ils démarrent du fait que $\mathcal{E}$ est une base orthogonale et dont les coeff sont les coeff de Fourier (0.75pt). Adapter la notation si jamais ils partent de l'identité de Parceval générale (ne pas trop pénaliser).

4. (0.5pt) + (0.5pt).

Exercice 2. (7pt)
On considère le signal continue suivant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad s(t) = 4\cos(2\pi \frac{30}{64} t) - 8\sin(2\pi \frac{31}{64} t).$$

1. Donner l'expression du signal $z \in \ell_{64}$ obtenus par échantillonage de s à un pas de temps de 1, à l'aide d'exponentielles complexes.

2. A partir de l'expression précédente, en déduire $\hat{z}$ la DFT de z.

3. Vérifier que pour tout $m \in \{0, 1, \ldots, 63\}$, $\hat{z}(m) = \overline{\hat{z}(64-m)}$. Pourquoi pouvait-on s'attendre à cette relation ?

4. Dessiner le spectre d'amplitude de $\hat{z}$. Commenter le contenu fréquentiel de z ?

5. Pour simplifier les calculs, on note $N = 64$. Soit $m_0 \in \mathbb{N}^*$ et $h \in \ell_N$ le signal tel que pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$

$$h(n) = \frac{1}{N}\left(1 + \sum_{m=1}^{m_0} 2\cos\left(\frac{2\pi mn}{N}\right)\right).$$

Que vaut $\hat{h}$? *Indication : on pourra écrire h à l'aide d'exponentielle complexe.*

6. Soit $T : \ell_N \to \ell_N$ l'endomorphisme défini par $T(w) = h * w$ pour tout $w \in \ell_N$. Justifier sans calculs que $T \circ R_k = R_k \circ T$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ où R_k est l'opérateur de translation à droite de k.

7. Que représente h pour T ?

8. On suppose dans cette question uniquement que $m_0 = 5$. Quelle est la nature du filtre représenté par T ?

9. Soit z_0 un signal vérifiant $\hat{z}_0(m) = 0$ pour tout $m \in \{11, \ldots, 53\}$. On suppose que l'on a accès uniquement au signal $\sigma = z_0 + z$ (la superposition de z_0 et z). On souhaite effectuer une transformation à σ de sorte qu'après traitement on obtienne z_0. Justifier comment choisir m_0 pour atteindre cet objectif.

Correction.

1. On a pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, 63\}$, $z(n) = s(n)$ donc

$$\begin{aligned} z(n) &= 4\cos(2\pi\frac{30}{64}n) - 8\sin(2\pi\frac{31}{64}n), \text{(0.5}pt\text{)} \\ &= 2e^{2i\pi\frac{30n}{64}} + 2e^{-2i\pi\frac{30n}{64}} + 4ie^{2i\pi\frac{31n}{64}} - 4ie^{-2i\pi\frac{31n}{64}}, \\ &= 2e^{2i\pi\frac{30n}{64}} + 2e^{2i\pi\frac{34n}{64}} + 4ie^{2i\pi\frac{31n}{64}} - 4ie^{2i\pi\frac{33n}{64}}.\text{(0.5}pt\text{)} \end{aligned}$$

2. On sait que pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, 63\}$, $z(n) = \frac{1}{64}\sum_{m=0}^{63} \hat{z}(m)e^{2i\pi\frac{mn}{64}}$ (0.5pt), par identification on a donc $\hat{z}(30) = 128$, $\hat{z}(31) = 256i$, $\hat{z}(33) = -256i$, $\hat{z}(34) = 128$ et toutes les autres coefficients sont nuls (0.5pt).

3. Pour toutes les coefficients nuls de $\hat{z}$ c'est direct et sinon $\hat{z}(30) = 128 = \overline{\hat{z}(64-30)}$, $\hat{z}(31) = 256i = \overline{\hat{z}(64-31)}$ (0.25pt). C'est une conséquence du fait que z est un signal réel et de la propriété satisfaite par la DFT pour tout $w \in \ell_64$, $\hat{\overline{w}} = \overline{\hat{w}(64-\cdot)}$ (0.5pt).

4. Le signal ne contient que des hautes fréquences (0.25 + 0.5pt).

5. On a pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$

$$h(n) = \frac{1}{N}\left(1 + \sum_{m=1}^{m_0}\frac{1}{2}2(e^{2i\pi\frac{mn}{N}} + e^{-2i\pi\frac{mn}{N}})\right) = \frac{1}{N}e^{2i\pi\frac{0\cdot n}{N}} + \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{m_0}\frac{2}{2}e^{2i\pi\frac{mn}{N}} + \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{m_0}\frac{2}{2}e^{2i\pi\frac{(N-m)n}{N}} \text{(0.5}pt\text{)}.$$

Or $h(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\hat{h}(m)e^{2i\pi\frac{mn}{N}}$, donc par identification $\hat{h}(0) = 1$, $\hat{h}(m) = \frac{2}{2}$ si $1 \leqslant m \leqslant m_0$ et $N - n_0 \leqslant m \leqslant N-1$, et 0 sinon (0.5pt).

6. Comme T est un opérateur de convolution, c'est un opérateur stationnaire donc vérifie bien par définition $T \circ R_k = R_k \circ T$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (0.75pt).

7. $h = T(e_0) = T(\delta)$ est la réponse impulsionnelle de l'opérateur stationnaire T (0.5pt).

8. On sait que T est un multiplicateur de Fourier par $\hat{h}$, et vu $\hat{h}$, c'est donc un filtre passe-bas (0.5pt).

9. On a $T(\sigma) = T(z_0 + z) = T(z_0) + T(z)$ et si m_0 satisfait $10 < m_0 < 30$ alors $T(z) = 0$ et $T(z_0) = z_0$ (0.75pt). *Erreur dans l'énoncé, il manquait un 2 devant le cos dans h qui assure bien que $T(z_0) = z_0$.*

Exercice 3. (4pt) + (1pt) bonus
Soit $T : \ell_4 \to \ell_4$ un endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de ℓ_4 est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Que peut-on alors dire de T ?

2. Exprimer la réponse impulsionnelle de T en fonction des éléments de la base canonique $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ de ℓ_4.

3. Montrer que pour tout $z \in \ell_4$, $z * e_2 = R_2(z)$.

4. En déduire l'expression de T en fonction des opérateurs de translations R_k pour $k \in \mathbb{Z}$.

5. Diagonaliser la matrice A. *Indication : on pensera à utiliser h.*

6. Question bonus. Soit $b \in \mathbb{C}^4$. Justifier que le système $Ax = b$ admet une unique solution. Proposer une méthode de résolution de ce système linéaire utilisant la transformée de Fourier discrète.

Correction.

1. La matrice A est circulante donc T est stationnaire (0.5pt).

2. La réponse impulsionnelle $h \in \ell_4$ de T est donnée par la première colonne de A (0.5pt). On a donc $h = 2e_1 - e_3$ (0.25pt).

3. On a pour tout $n \in \{0, \ldots, 3\}$, $z * e_2(n) = \sum_{k=0}^{3} \underbrace{e_2(k)}_{\delta_{k,2}} z(n-k) = z(n-2) = R_2(z)(n)$

(0.25pt) pour def convolution, (0.5pt) pour reste du calcul.

4. On a pour tout $z \in \ell_4$, $T(z) = h * z = 2e_1 * z - e_3 * z = 2R_1(z) - R_3(z)$. Donc $T = 2R_1 - R_3$ (0.5pt).

5. On sait que T est un multiplicateur de Fourier par $\hat{h}$. Matriciellement, cela signifique que $A = W_4^{-1} D W_4$ où D est une matrice diagonale dont les éléments sont donnés par le vecteur $\hat{h}$. Or pour tout $0 \leqslant m \leqslant 3$, $\hat{h}(m) = \sum_{n=0}^{3} (2e_1(n) - e_3(n)) e^{-\frac{2i\pi mn}{4}} = 2e^{-\frac{i\pi n}{2}} - e^{-\frac{3i\pi n}{2}}$. Donc les éléments diagonaux sont dans l'ordre 1, $-3i$, -1, $3i$

   (0.75pt) pour le calcul de $\hat{h}$, (0.75pt) pour le reste du raisonnement.

6. La matrice A est inversible puisque diagonalisable et sans valeurs propres nulles. Le système linéaire $Ax = b$ admet donc une unique solution (0.25pt). En identifiant x et b à leurs suites 4-périodique, $Ax = b$ se réécrit $h * x = b$. Donc $\hat{x} = \frac{\hat{b}}{\hat{h}}$, où par abus de langage la division se fait coefficient par coefficient. On a donc $x = IDFT(\frac{\hat{b}}{\hat{h}})$ (0.75pt).

   De manière équivalente, on aurait pu dire que d'après la question précédente, $W_4^{-1} D W_4 x = b$ et donc $x = W_4^{-1} D^{-1} W_4 b$. Ce qui revient bien à la même chose. Pour résoudre le système, il suffit donc de prendre les DFT de b et h, de faire leur division coefficient par coefficient et de prendre l'IDFT du résultat.

   Notons que de manière générale, si A est une matrice circulante de taille $N \times N$ dont les coefficients de la DFT de la première colonne sont non nuls (ce qui revient à dire que A est inversible) alors la solution du système linéaire $Ax = b$ peut également être obtenue par cette algorithme. Comme cela revient à faire des DFT, sa complexité est en $O(N \log(N))$. C'est une grande amélioration par rapport à la méthode du pivot de Gauss qui a une complexité en $O(N^3)$.