Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 3ème année, 2021-2022, Transformée de Fourier et Applications

Partiel du 10/03/2022

Durée 1h30. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants. On prendra soin de bien justifier les réponses.

Exercice 1. (3.5pt)
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace ℓ_N des suites complexes N-périodique.

1. Donner la définition de la famille $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_{N-1})$ des exponentielles complexes. Rappeler ce que vaut $\langle \mathcal{E}_n, \mathcal{E}_m \rangle$ pour $n, m \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Commenter.

2. Rappeler la définition de la transformée de Fourier discrète et de la transformée de Fourier discrète inverse.

3. Montrer l'identité de Parceval : pour tout $z, w \in \ell_N$, $\langle z, w \rangle = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m)\overline{\hat{w}(m)}$.

4. Donner la matrice W_3 de la transformée de Fourier discrète dans la base canonique de ℓ_3 ainsi que la matrice de la transformée de Fourier discrète inverse (également dans la base canonique).

Exercice 2. (7pt)
On considère le signal continue suivant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad s(t) = 4\cos(2\pi \frac{30}{64} t) - 8\sin(2\pi \frac{31}{64} t).$$

1. Donner l'expression du signal $z \in \ell_{64}$ obtenus par échantillonage de s à un pas de temps de 1, à l'aide d'exponentielles complexes.

2. A partir de l'expression précédente, en déduire $\hat{z}$ la DFT de z.

3. Vérifier que pour tout $m \in \{0, 1, \ldots, 63\}$, $\hat{z}(m) = \overline{\hat{z}(64-m)}$. Pourquoi pouvait-on s'attendre à cette relation ?

4. Dessiner le spectre d'amplitude de $\hat{z}$. Commenter le contenu fréquentiel de z ?

5. Pour simplifier les calculs, on note $N = 64$. Soit $m_0 \in \mathbb{N}^*$ et $h \in \ell_N$ le signal tel que pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$

$$h(n) = \frac{1}{N}\left(1 + \sum_{m=1}^{m_0} 2\cos\left(\frac{2\pi mn}{N}\right)\right).$$

Que vaut $\hat{h}$? *Indication : on pourra écrire h à l'aide d'exponentielle complexe.*

6. Soit $T : \ell_N \to \ell_N$ l'endomorphisme défini par $T(w) = h * w$ pour tout $w \in \ell_N$. Justifier sans calculs que $T \circ R_k = R_k \circ T$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ où R_k est l'opérateur de translation à droite de k.

7. Que représente h pour T ?

8. On suppose dans cette question uniquement que $m_0 = 5$. Quelle est la nature du filtre représenté par T ?

9. Soit z_0 un signal vérifiant $\hat{z_0}(m) = 0$ pour tout $m \in \{11, \dots, 53\}$. On suppose que l'on a accès uniquement au signal $\sigma = z_0 + z$ (la superposition de z_0 et z). On souhaite effectuer une transformation à σ de sorte qu'après traitement on obtienne z_0. Justifier comment choisir m_0 pour atteindre cet objectif.

Correction.

1. On a pour tout $n \in \{0, 1, \dots, 63\}$, $z(n) = s(n)$ donc

$$\begin{aligned} z(n) &= 4\cos(2\pi \frac{30}{64} n) - 8\sin(2\pi \frac{31}{64} n), \text{(0.5}pt) \\ &= 2e^{2i\pi \frac{30n}{64}} + 2e^{-2i\pi \frac{30n}{64}} + 4ie^{2i\pi \frac{31n}{64}} - 4ie^{-2i\pi \frac{31n}{64}}, \\ &= 2e^{2i\pi \frac{30n}{64}} + 2e^{2i\pi \frac{34n}{64}} + 4ie^{2i\pi \frac{31n}{64}} - 4ie^{2i\pi \frac{33n}{64}}.\text{(0.5}pt) \end{aligned}$$

2. On sait que pour tout $n \in \{0, 1, \dots, 63\}$, $z(n) = \frac{1}{64} \sum_{m=0}^{63} \hat{z}(m) e^{2i\pi \frac{mn}{64}}$ (0.5pt), par identification on a donc $\hat{z}(30) = 128$, $\hat{z}(31) = 256i$, $\hat{z}(33) = -256i$, $\hat{z}(34) = 128$ et toutes les autres coefficients sont nuls (0.5pt).

3. Pour toutes les coefficients nuls de $\hat{z}$ c'est direct et sinon $\hat{z}(30) = 128 = \overline{\hat{z}(64-30)}$, $\hat{z}(31) = 256i = \overline{\hat{z}(64-31)}$ (0.25pt). C'est une conséquence du fait que z est un signal réel et de la propriété satisfaite par la DFT pour tout $w \in \ell_6 4$, $\hat{\overline{w}} = \overline{\hat{w}(64 - \cdot)}$ (0.5pt).

4. Le signal ne contient que des hautes fréquences (0.25 + 0.5pt).

5. On a pour tout $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

$$h(n) = \frac{1}{N}\left(1 + \sum_{m=1}^{m_0} \frac{1}{2} 2 (e^{2i\pi \frac{mn}{N}} + e^{-2i\pi \frac{mn}{N}})\right) = \frac{1}{N} e^{2i\pi \frac{0 \cdot n}{N}} + \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{m_0} \frac{2}{2} e^{2i\pi \frac{mn}{N}} + \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{m_0} \frac{2}{2} e^{2i\pi \frac{(N-m)n}{N}} \text{(0.5}pt).$$

Or $h(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{h}(m) e^{2i\pi \frac{mn}{N}}$, donc par identification $\hat{h}(0) = 1$, $\hat{h}(m) = \frac{2}{2}$ si $1 \leqslant m \leqslant m_0$ et $N - n_0 \leqslant m \leqslant N-1$, et 0 sinon (0.5pt).

6. Comme T est un opérateur de convolution, c'est un opérateur stationnaire donc vérifie bien par définition $T \circ R_k = R_k \circ T$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (0.75pt).

7. $h = T(e_0) = T(\delta)$ est la réponse impulsionnelle de l'opérateur stationnaire T (0.5pt).

8. On sait que T est un multiplicateur de Fourier par $\hat{h}$, et vu $\hat{h}$, c'est donc un filtre passe-bas (0.5pt).

9. On a $T(\sigma) = T(z_0 + z) = T(z_0) + T(z)$ et si m_0 satisfait $10 < m_0 < 30$ alors $T(z) = 0$ et $T(z_0) = z_0$ (0.75pt). *Erreur dans l'énoncé, il manquait un 2 devant le cos dans h qui assure bien que $T(z_0) = z_0$.*

Exercice 3. (4pt) + (1pt) bonus

Soit $T : \ell_4 \to \ell_4$ un endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de ℓ_4 est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Que peut-on alors dire de T ?

2. Exprimer la réponse impulsionnelle de T en fonction des éléments de la base canonique $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ de ℓ_4.

3. Montrer que pour tout $z \in \ell_4$, $z * e_2 = R_2(z)$.

4. En déduire l'expression de T en fonction des opérateurs de translations R_k pour $k \in \mathbb{Z}$.

5. Diagonaliser la matrice A. *Indication : on pensera à utiliser h.*

6. Question bonus. Soit $b \in \mathbb{C}^4$. Justifier que le système $Ax = b$ admet une unique solution. Proposer une méthode de résolution de ce système linéaire utilisant la transformée de Fourier discrète.

Correction.

1. La matrice A est circulante donc T est stationnaire (0.5pt).

2. La réponse impulsionnelle $h \in \ell_4$ de T est donnée par la première colonne de A (0.5pt). On a donc $h = 2e_1 - e_3$ (0.25pt).

3. On a pour tout $n \in \{0, \dots, 3\}$, $z * e_2(n) = \sum_{k=0}^{3} \underbrace{e_2(k)}_{\delta_{k,2}} z(n-k) = z(n-2) = R_2(z)(n)$

   (0.25pt) pour def convolution, (0.5pt) pour reste du calcul.

4. On a pour tout $z \in \ell_4$, $T(z) = h * z = 2e_1 * z - e_3 * z = 2R_1(z) - R_3(z)$. Donc $T = 2R_1 - R_3$ (0.5pt).

5. On sait que T est un multiplicateur de Fourier par $\hat{h}$. Matriciellement, cela signifie que $A = W_4^{-1} D W_4$ où D est une matrice diagonale dont les éléments sont donnés par le vecteur $\hat{h}$. Or pour tout $0 \leqslant m \leqslant 3$, $\hat{h}(m) = \sum_{n=0}^{3} (2e_1(n) - e_3(n)) e^{-\frac{2i\pi mn}{4}} = 2e^{-\frac{i\pi n}{2}} - e^{-\frac{3i\pi n}{2}}$. Donc les éléments diagonaux sont dans l'ordre 1, $-3i$, -1, $3i$

   (0.75pt) pour le calcul de $\hat{h}$, (0.75pt) pour le reste du raisonnement.

6. La matrice A est inversible puisque diagonalisable et sans valeurs propres nulles. Le système linéaire $Ax = b$ admet donc une unique solution (0.25pt). En identifiant x et b à leurs suites 4-périodique, $Ax = b$ se réécrit $h * x = b$. Donc $\hat{x} = \frac{\hat{b}}{\hat{h}}$, où par abus de langage la division se fait coefficient par coefficient. On a donc $x = IDFT(\frac{\hat{b}}{\hat{h}})$ (0.75pt).

De manière équivalente, on aurait pu dire que d'après la question précédente, $W_4^{-1}DW_4x = b$ et donc $x = W_4^{-1}D^{-1}W_4b$. Ce qui revient bien à la même chose. Pour résoudre le système, il suffit donc de prendre les DFT de b et h, de faire leur division coefficient par coefficient et de prendre l'IDFT du résultat.

Notons que de manière générale, si A est une matrice circulante de taille $N \times N$ dont les coefficients de la DFT de la première colonne sont non nuls (ce qui revient à dire que A est inversible) alors la solution du système linéaire $Ax = b$ peut également être obtenue par cette algorithme. Comme cela revient à faire des DFT, sa complexité est en $O(N\log(N))$. C'est une grande amélioration par rapport à la méthode du pivot de Gauss qui a une complexité en $O(N^3)$.